

## 平均速度の逆数による斜面崩壊発生時刻の予測 - 斜面崩壊の発生予測に関する研究(3) -

著者	福 園輝旗
雑誌名	防災科学技術研究所 研究報告
巻	46
ページ	45-81
発行年	1990-12
URL	<a href="http://doi.org/10.24732/nied.00001009">http://doi.org/10.24732/nied.00001009</a>

## 平均速度の逆数による斜面崩壊発生時刻の予測

### —斜面崩壊の発生予測に関する研究(3)—

福囿輝旗\*

防災科学技術研究所

## Prediction of Failure Time of a Slope by Reciprocal of Mean Velocity —Study on Prediction of Slope Failure (3)—

by

Teruki Fukuzono

*National Research Institute for Earth Science and Disaster Prevention*

### Abstract

A curve representing the variation of reciprocal of velocity of surface displacement in a slope failure gradually turns downwards shortly before the failure time and finally touches the horizontal time axis on a rectangular diagram. This fact can be used for predicting the failure time of a slope. As the basis for using the curve to predict the failure time, a basic equation representing that the logarithm of acceleration of surface displacement increase in proportion to the logarithm of velocity of surface displacement is proposed. The equation contains three types of functions representing the variation of velocity. One of them is called Saito type function and is highly available for prediction.

A practical method for predicting the failure time using the reciprocal of mean velocity of surface displacement is proposed. The errors in the difference between the mean and the real velocity and between the predicted and the real failure time by using the practical procedure are discussed. As a result, it is pointed out that they are small values on the part of safety to prevent disaster.

The availability of proposed prediction method is confirmed by the results of application to some model slope failures and actual landslides. The prototype of a failure time predictor based on above concept is made and gives good results for prediction in slope failure experiments.

key words : Slope failure, Experiment, Prediction

キーワード : 斜面崩壊, 実験, 予測

## 1. はじめに

自然災害の中で土石流・地すべり・斜面崩壊などの土砂災害はもっとも人的被害の多いものである。しかも、日本全国いたるところで毎年の如く発生し、減少の兆が見えない。これは、人類の生活範囲がこれらの潜在的な危険地帯へと拡大しつつあることも原因であるが、一方では、自然現象としての発生機構が十分に解明されていないために、警報・避難などの適切な対策が取れないことにもよる。

この解明が遅れている理由の一つは、これらの現象に関与している因子を実斜面で直接観測することが不可能に近いからである。このために筆者は降雨による斜面崩壊を対象として、大規模な模型斜面を人工的に崩壊させ、そこでの種々の物理量の変化を実測することにより崩壊機構のモデル化を試みている。

これらの一連の実験、研究はまだ継続中であり、最終的なまとめまで至っていないが、今までに、砂質土斜面での実験結果の概要と応力状態の変化に関する考察(福囿, 1978)を行い、また、粘性土斜面での実験結果の概要と主として表面の移動パターンの解析結果を報告(福囿, 1982)している。ここでは、後者の論文(福囿, 1982)で報告した表面の移動パターンに関する知見を発展させた崩壊時刻の予測法について述べる。

第2章以後の構成は、第2章で速度の逆数を用いた予測の基本概念、第3章で予測の根拠となる表面移動を表わすモデル、第4章で実用的な方法として提案する平均速度の逆数を用いた予測法、第5章で平均速度の逆数を用いたときの理論上の誤差と測定誤差、第6章で崩壊実験と実斜面の崩壊への適用例、第7章で平均速度の逆数を用いてリアルタイムで崩壊時刻を予測する予知計の試作について述べ、第8章でまとめを行う。

なお、本論文は、以下の第2, 3, 4, 6章で既発表の論文(福囿, 1982, 1985a, 1985b, 1987)の内容に新たな解釈、事例を附加し、第5, 7章に新しい知見と試みを述べ、全体を総合的にまとめたものである。

## 2. 速度の逆数により崩壊時刻を予測する基本概念

関東ローム斜面では、降雨により斜面が崩壊する場合の移動量の変化パターンは図1に示すように、4段階を経ることが指摘されている(福囿, 1982)。一般に段階を経るごとに速度が増し、最終段階では累乗的に急増する。砂質土斜面ではこのように明確に段階を分けることは出来ないが、時間の経過とともに次第に速度を増し、最終段階で急増することは同様である。また、大八木ら(1986)が1985年7月に発生した地附山地すべりの調査結果で示しているように、実斜面でも瞬間的に破壊するわけではなく、同様な移動速度の増加現象を示したうえで、最終的な急速移動とともに崩壊が発生する。さらに、粘土などの土の要素を用いた

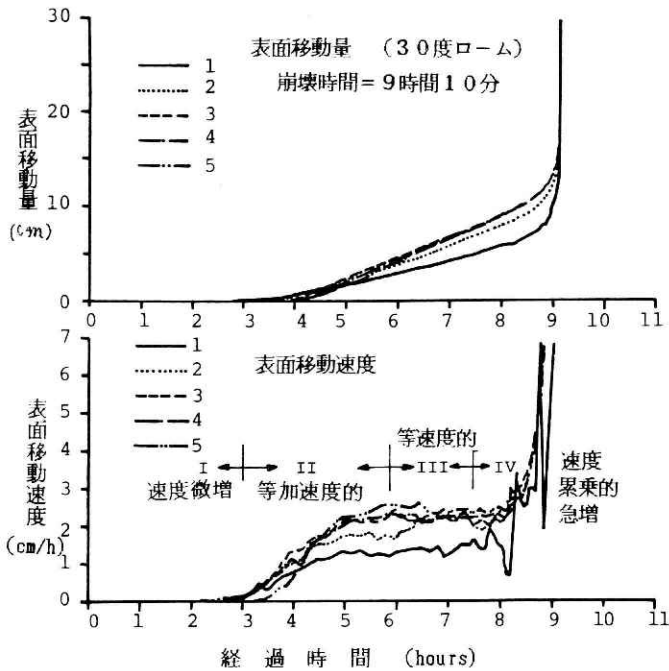


図1 模型斜面の崩壊実験で測定された表面移動量と移動速度の変化(福岡, 1982).

Fig. 1 Variations of surface displacement and velocity of surface displacement measured in a model slope failure (Fukuzono, 1982).

クリープ破壊試験でも同様な速度の増加現象が見られ、特に第3次クリープの加速段階は図1における第IV段階に代表される崩壊直前の最終段階の変化と酷似している。

今日、クラックやはらみだしなどの前兆現象が表れて、危険だと思われる地すべり・崩壊のほとんどで、地表面の移動量を観測することが行われている。これは移動状態の変化を監視し、適切な対策を施すためであるが、一般に図1のような移動量の時間変化あるいは移動速度の時間変化のグラフを描いている。前述のように、最終崩壊に近づくほど速度や加速度が大きくなるので、これらの曲線は右上りに上昇し、その度合いが増す。したがって、その増加の仕方から最終崩壊の危険が迫っているかどうかを察することができる。しかし、崩壊の時期に近付いているかどうかを定性的に察することはできても、このグラフからその時期を正確な数値として定量的に求めることは困難である。

図1に示されているように、“速度”の時間変化を表す曲線は下に凸で、崩壊に近づくにつれ急激に上昇する右上りの曲線である。このことから、“速度の逆数”の時間変化を表す曲線は右下りになることが推察される。図2に両曲線を対比して示す。図に示されているように、崩壊時刻に近付くと速度の逆数曲線は右下りになり、目盛りを適切に選定すれば崩壊発生

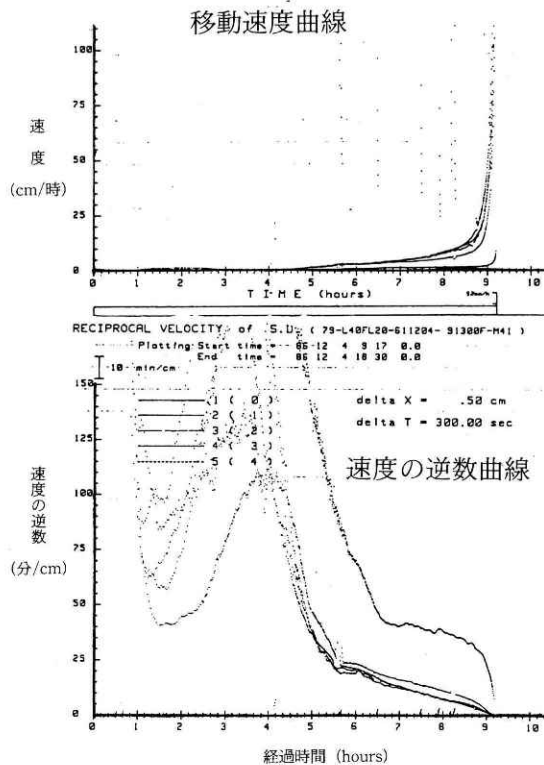


図2 典型的な速度の変化と速度の逆数の変化。

Fig. 2 Typical curves showing difference of velocity and reciprocal of velocity of surface displacement.

時点と時間軸とほぼ接することになる。したがって、任意時点において、それまでに得られた速度の逆数曲線を適切に延長し時間軸と交わるであろうと思われる交点を求めることにより、崩壊時刻を定量的に予測することができる。また、逆に、斜面が移動を始めたのであるが、対策工の効果などにより安定な状態に戻つつある。すなわち移動速度が減少し始めた場合には、曲線は右上りとなる。この性質から、曲線が時間軸へ接近するかどうか、あるいはその度合い、時間軸からの距離により相対的な崩壊発生の危険度を感覚的に察することができる。

このように、最終崩壊が発生する直前での速度の逆数曲線の性質、すなわち、最終崩壊が起こる直前には右下りになり、かつ崩壊時刻において時間軸とほぼ接するという性質を利用して、この曲線から崩壊時刻の定量的な予測が可能である。しかし、予測を行うためには速度の逆数曲線の定量的な性質が分かっているなければならない。すなわち、すべての崩壊での表面移動現象を定量的に説明する普遍的なモデル(基本式)が必要である。次章ではこの基

本式について述べる。

### 3. 表面移動を表現する基本式

関東ローム斜面において崩壊発生直前の最終段階、図1の第IV段階での移動速度と加速度を、両対数グラフ上にプロットすると、図3のようにほぼ直線関係を示す(福囿, 1982)。また、図4に示すように、砂質土斜面の崩壊の最終段階においても同様な直線関係が見られる(福囿, 1985)。これを次式のように表現する。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \cdot \left( \frac{dx}{dt} \right)^\alpha \quad (1)$$

ここに、 $x$ ；移動量、 $t$ ；時間、 $dx/dt$ ；速度、 $d^2x/dt^2$ ；加速度、 $a$ 、 $\alpha$ ；定数( $a>0$ 、 $\alpha>0$ )である(福囿, 1982)。

(1) 式が表現している関係は後述のように、地すべり・崩壊に限らず金属や氷あるいは火山噴火の前のドームの動きなど広範な破壊現象に見られ、破壊の最終段階あるいは第3次クリープ段階を表現するために提案されている既存のモデル(通常は速度・歪速度あるいは移動量・歪などの時間変化で表されている)のほとんどを、(1)式により統一的に説明することができる。なお、Voigt(1988)は(1)式の $x$ (移動量)を破壊時に変化するいろいろな物理量に置き換えることにより広範な破壊現象に適用できることから、(1)式が表現していることは破壊現象の本質を表す基本的な関係であると述べている。

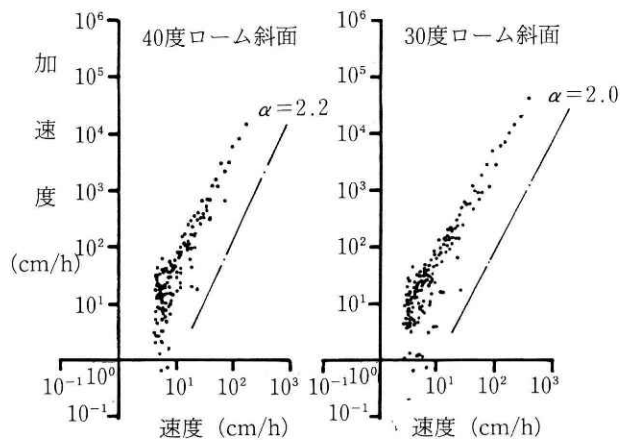


図3 関東ローム斜面における移動速度と加速度との関係(福囿, 1982)。

Fig. 3 Relation of acceleration and velocity of surface displacement shortly before failure in a loamy soil model failure (Fukuzono, 1982).

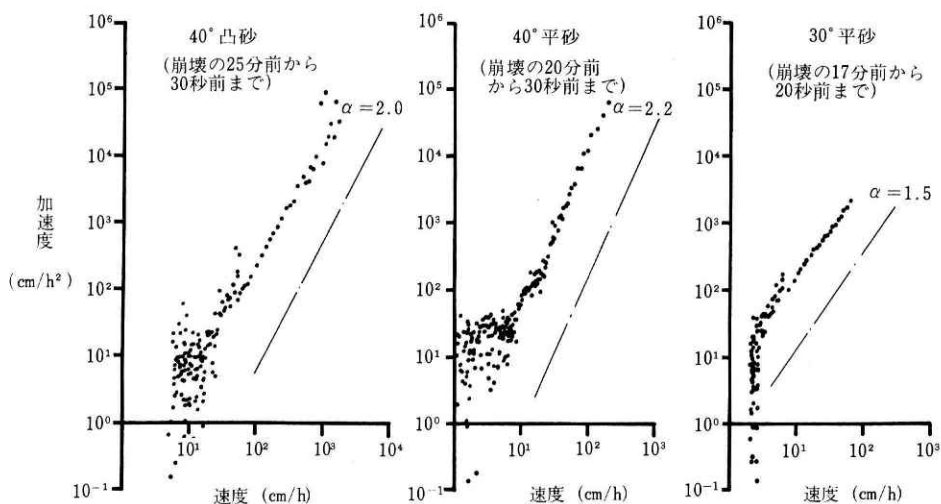


図4 砂質土斜面における移動速度と加速度との関係(福園, 1982).

Fig. 4 Relation of acceleration and velocity of surface displacement shortly before failure in a sandy soil model slope failure (Fukuzono, 1982).

(1)式を1回積分して速度の時間変化で表すと,  $\alpha$  の値の範囲により次の3種類の関数に分けられる(福園, 1982).

$$0 < \alpha < 1 \text{ の時 } \frac{dx}{dt} = \{a(1-\alpha)\}^{\frac{1}{1-\alpha}} (t_1+t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (2-1)$$

$$\alpha = 1 \text{ の時 } \frac{dx}{dt} = \exp\{a(t_2+t)\} \quad (2-2)$$

$$\alpha > 1 \text{ の時 } \frac{dx}{dt} = \{a(\alpha-1)\}^{\frac{-1}{\alpha-1}} (t_r-t)^{\frac{-1}{\alpha-1}} \quad (2-3)$$

ここに,  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_r$  は定数である.

(2-1), (2-2)式はそれぞれ  $t$  に関するべき関数型, 指数関数型である. (2-3)式は  $t_r-t$  に関するべき関数であるが,  $\alpha=2$  の場合には斎藤が第3次クリープ段階で崩壊時期の予測に用いている基本式と同型であり, ここでは斎藤型と呼ぶ. なお, 以下, 必要に応じて,  $\alpha=2$  の場合を斎藤P型,  $\alpha \neq 2$  の場合を斎藤G型, 全体を斎藤型と呼ぶ. 崩壊の最終段階や第3次クリープの変形を表現するために, 今までに提案されているすべてのモデルがこの3種類の関数型に分類される様である.

(2-1)式のべき関数型は, Singh & Mitchell(1969), 駒村(1976)により提案されている.

(2-2)式の指数関数型には, 山田ら(1971)による高場山トンネルの移動機構の解析, Vibertら(1987)によるフランスのLa Clapiere地すべり移動の解釈, Voightら(1979)によるCHI-

QUICAMATA MINE の崩壊予測に関する研究がある。山田らは進行性破壊の概念で、角速度に比例して剪断抵抗が減少すると仮定して円弧すべりに対する運動方程式を解き(2-2)式の関数型を得ている(ただし、歪速度ではなく角速度の時間変化である)。

(2-3)式の斎藤型は、斎藤(1968)の他、Campanella & Vaid(1974)は乱さない粘土試料のクリープ試験結果から、 $\alpha=2$ の関数型で表せるとしている。ただし、かれらの論文中に示されている実験結果の図には、 $\alpha \neq 2$ を仮定したほうが良いと思われるものもある。実斜面では、渡ら(1976)、島ら(1977)、山口(1977)が $\alpha \neq 2$ の場合を示している。また、大村・土屋(1988)の「すべり面拡大モデル」もこの関数型である。

筆者の実験の範囲、吉田・野地(1984)の集計結果からは、 $\alpha=1.5 \sim 2.2$ の範囲であり、(2-3)式で表される(福園, 1987)。しかし、これは、前述のIV段階の全体を通して考えた場合で、以下にのべるように、IV段階をさらに細かく段階分けすると(2-1)あるいは(2-2)式で表される時期もある。

また、Varnes(1983)は、過去に発表された土・岩石の室内試験、実際の崩壊例、氷・金属等を含めた36例で3次クリープの範囲を、上記、ベキ関数型、指数関数型、斎藤P型、斎藤G型の4種に分類している。実際には、3次クリープ段階全体を1つの関数型で表せない場合もあり、その場合には、最高4段階にまで細かくわけ、結局55段階での各関数型の適合性を検討している。同様な手法で解析した筆者の実験結果も合わせて表1に示す。

表1のVarnesの例では全体の約82%が斎藤型で表されている。特に、土と岩石に限って見ると、室内試験は100%、実際の崩壊例では78%、全体で88%が斎藤型である。

筆者の行った実験の内、解析した15例(35段階に分けられる)は、83%が斎藤型である。ロ

表1 各関数型の割合(福園, 1987)

Table 1 Compilation of 90 observed functions classified by function type (Fukuzuno, 1987).

例数	段階数	斎藤P型	斎藤G型	指数関数	ベキ関数	
11	18	8	6	1	3	Field Rock or soil
6	8	5	3	0	0	Laboratory Rock
6	9	7	2	0	0	Laboratory soil
4	5	4	1	0	0	Field ice or frozen soil
4	6	3	0	3	0	Laboratory ice or frozen soil
5	9	4	2	3	0	Metals
4	7	2	3	1	1	実験, 40度, 砂
3	10	4	3	2	1	実験, 30度, 砂
4	9	5	3	1	0	実験, 40度, ローム
4	9	5	4	0	0	実験, 30度, ローム
51	90	47	27	11	5	合計
	100	52	30	12	6	(%)



ーム質土よりも砂質土の方が斎藤型以外で表される割合が高い。なお、これらは測定場所が異なると違った結果になる。表1は、崩壊土塊のほぼ中央部で観測された移動量の変化を解析した結果である。

また、Varnes の例で、土・岩石の場合、室内試験では71%が斎藤 P 型であるが、実際例では44%に低下するとともに、斎藤型以外の関数型が増えている。また、段階分けも多くなる。実際の崩壊では複雑な土質条件に加えて、崩壊過程での応力状態も変化するために、全過程を通して1種類の関数型で表すことが困難であることを示している。

以上、崩壊の最終段階や第3次クリープの変形速度の時間変化を表現するために、今までに提案されているモデルはベキ関数型、指数関数型、斎藤型に分類され、過去に観測された崩壊の80%以上が斎藤型であることを示した。また、これらを統一的に表現できるモデルとして(1)式を示した。

ところで、この(1)式は右辺、速度に乘じられている係数  $a$  の符号を負(マイナス)に取ることにより、第1次クリープ段階の変形式として今までに提案されているモデルを統一的に表すことができる。例えば、村山・柴田(1956)のモデル  $dx/dt = A/t$  あるいは駒村(1976)のモデル  $dx/dt = A \cdot \exp(-at)$  を、 $t$  で1回微分し整理すると、(1)式と同形の微分方程式が得られる。これら第1次クリープのモデルは本論文の主題である崩壊時刻の予測とは直接関係がないので、ここでは省略し、次報以降に詳述する。

#### 4. 崩壊発生時刻の予測

##### 4.1 速度の逆数曲線と予測

崩壊が差し迫ってきた最終段階における移動速度の時間変化を表す(2-1)、(2-2)、(2-3)式から、速度の逆数の時間変化を表す次式がえられる。

$$0 < \alpha < 1 \text{ の時 } \frac{dt}{dx} = \{a(1-\alpha)\}^{\frac{-1}{1-\alpha}} (t_1+t)^{\frac{-1}{1-\alpha}} \quad (\text{ベキ関数型}) \quad (3-1)$$

$$\alpha = 1 \text{ の時 } \frac{dt}{dx} = \exp\{-a(t_2+t)\} \quad (\text{指数関数型}) \quad (3-2)$$

$$\alpha > 1 \text{ の時 } \frac{dt}{dx} = \{a(\alpha-1)\}^{\frac{1}{\alpha-1}} (t_r-t)^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (\text{斎藤型}) \quad (3-3)$$

これらを普通目盛りのグラフに表すと図5に示すように、すべての曲線が右下りである。ベキ関数型と指数関数型は上に凹で、時間の経過とともに、時間軸へ無限に近づくが接することはない。斎藤型は、 $\alpha > 2$  で上に凸、 $\alpha = 2$  で直線、 $1 < \alpha < 2$  で上に凹の3形態に分けられるが、ともに時間軸上の  $t = t_r$  に向かう右下りの曲線である(福囿, 1988)。

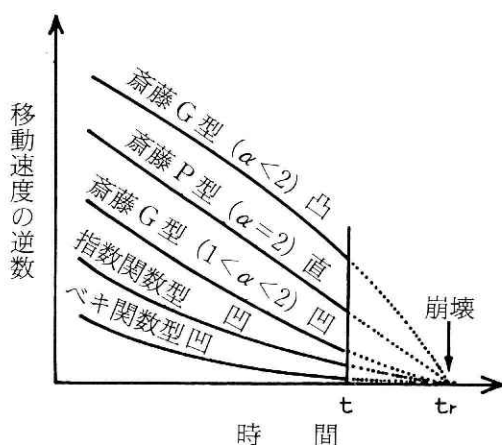


図5 速度の逆数曲線(福岡, 1987)。

Fig. 5 Curves of reciprocal of velocity and the concept of a prediction method (Fukuzono, 1987).

ベキ関数型, 指数関数型では時間が経過する( $t$ が増加する)にしたがって速度が限りなく増大することになる(速度の逆数が限りなく減少するが零になることはない)が, 筆者の実験あるいは実斜面の観測では最終崩壊までこの関数型が続くことはない, 崩壊の直前で変形パターンが変化する。図6は筆者の実験で得られた例である。崩壊の直前で凹型が凸型に変化している。このような変化パターンが多いようである。

斎藤型の場合, (2-3)式から推察されるように, 時間 $t$ が $t_r$ に近づくにつれ速度が増し,  $t = t_r$ で無限大になる。実斜面の崩壊では, 移動速度が無限大になることはありえないので, 斎藤型の $t = t_r$ 近辺では, 移動を正確にシミュレートすることは出来ない。

Voight (1989) は, 最終崩壊が起こるのは速度が有限の時であることから,  $t_r$ より前に最終崩壊が発生すると考えるべきであると述べている。そして, 一般に行われている  $t_r$ を崩壊時刻と仮定した予測では防災上危険側になる場合があることを指摘している。しかしながら, 斎藤の予測法(1968)では $t_r$ が崩壊時刻であると仮定しているにもかかわらず, 高場山トンネル地すべりの成果(山田ら, 1971)に見られるように, かなり正確な予測が可能である。

筆者の実験では, 右下りの直線であった速度の逆数曲線の勾配が変化し, 以前よりも緩やかになってから最終崩壊が発生する事例が見られる(後の図15はこの一例である)。これらの事例では, 途中段階の速度の逆数曲線が向かっている時刻( $t_r$ )は実際の崩壊発生時刻よりもわずかながら前である。これらの事例は, 前述の Voight の指摘に反し,  $t_r$ が崩壊時刻であると仮定して予測すると, 防災上わずかではあるが, 安全側の結果を得ることになる。

また, 渡ら(1976), 島ら(1977)は実斜面の崩壊を観測して得られた移動量の時間変化データから, 崩壊までの残り時間と速度との関係を求めている。その関数型は斎藤型であり, (2-3)あるいは(3-3)式の $t_r$ が崩壊時刻であると見なした場合に相当する。

これらの事例から, 斎藤型において $t_r$ のごく近辺で移動速度を正確にシミュレートできない

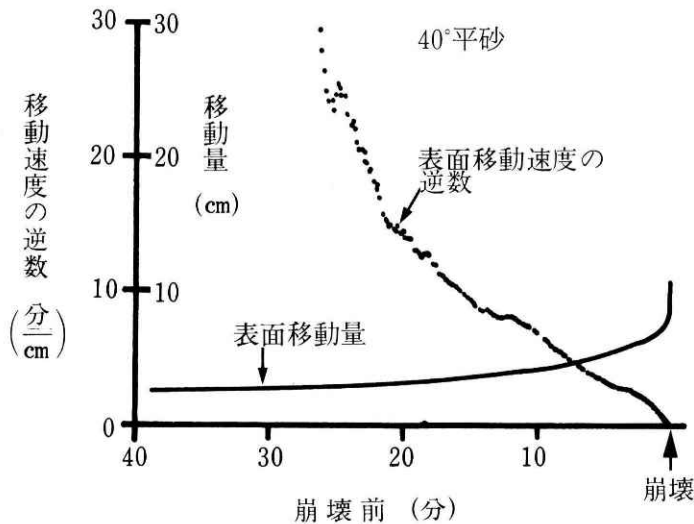


図6 砂質土斜面での移動速度の逆数曲線。

Fig. 6 Curve of the reciprocal of velocity measured in a sandy soil model slope failure.

期間は全体から見るとごく短時間に限られる(図15の例では全体約40分に対し約15秒)であろうことが推察される。したがって、 $t_r$ を崩壊時刻であると仮定しても實際上ほとんど問題はないものと思われる。もちろん、 $t_r$ 以外の時刻を崩壊時刻として選定してもよいが、その根拠を合理的に説明するためにはもっと多くのデータを蓄積し、研究する必要があるだろう。これらのことから、ここでは $t_r$ を崩壊時刻であると見なして以下の予測法を考察する。

このように、 $t_r$ で最終崩壊が発生するという仮定をおくと、図5に示した速度の逆数曲線を用いて、次のように、簡単に崩壊発生時刻を予測することが出来る。

前章で述べた様に、過去の崩壊例では全体の80%以上が斎藤型であり、しかも、約50%が斎藤P型、すなわち速度の逆数曲線が直線である。このことは、予測する際には基本的に斎藤型を仮定すべきであることを示している。図5において、実線は時刻 $t$ までに得られている速度の逆数曲線である。したがって、この実線を斎藤型と仮定して、破線で示すように、直線の場合にはそのまま直線を延長し、曲線の場合にはその曲り具合を考慮しながら曲線を延長して時間軸との交点を求めれば、その時刻が崩壊予測時刻である。ここで、説明が容易なように、以後、前者を直線延長法、後者を曲線延長法と呼ぶことにする。曲線延長法では直線ではなく、曲線で延長するために場合によってはかなりの誤差が出るであろう。このような場合に、正確に求める方法を図7に示す。これを接線法と呼ぶ(福圓, 1987)。

今まで述べてきたことは基本的に速度あるいは速度の逆数が正確に測定されたうえで成り立つ議論である。ところが、実斜面の移動速度は最終崩壊のごく近辺を除き、目視での確認が出来ないほど遅いために、現在の計測機器で速度あるいは速度の逆数そのものを直接測定

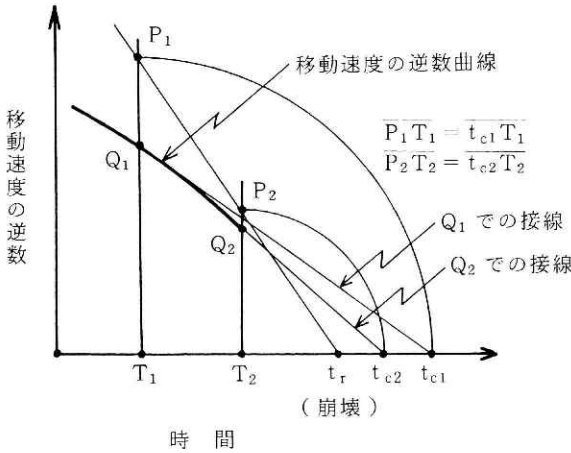


図7 接線法による崩壊時刻の予測(福岡, 1987).

$Q_1$ (時間  $T_1$ ) における速度の逆数曲線の接線と時間軸との交点を  $T_{c1}$  とする.  $T_1Q_1$  の延長上に  $T_1t_{c1} = T_1P_1$  なる点  $P_1$  を求める. 同様に,  $Q_2$ (時間  $T_2$ ) における接線から点  $P_2$  を求める.  $P_1P_2$  の延長線と時間軸との交点が崩壊時刻  $t_r$  である.

Fig. 7 Graphical method for predicting the failure time in the case where the curve of the reciprocal of velocity is convex or concave (Fukuzono, 1987).

することは不可能である. このために, ほとんどの地すべり・崩壊で一般的に測定されている表面の移動量データの離散値から速度, 速度の逆数を求めざるをえない. したがって, 本来瞬時値である速度, 速度の逆数がある期間の平均的な値として求めることになる. この様にして求めた値を, 今まで述べてきた方法に適用するためには, それにあった工夫が必要である. また, 実斜面への適用に当たっては誤差の検討が必要である. 次節および次章ではその点について述べる.

#### 4.2 平均速度の逆数による予測

移動量から平均速度の逆数(曲線)を求めるには以下のようにする(福岡, 1988).

今,  $\Delta t$  間に移動した量を  $\Delta x$ , あるいは, 時刻  $t_1$  での移動量が  $x_1$ , 時刻  $t_2$  での移動量が,  $x_2$  (すなわち,  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ) であったとすると, この間の平均速度は  $v = \Delta x / \Delta t = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1)$  である. この間の平均速度の逆数を  $\Lambda_m$  とすると,  $\Lambda_m = 1/v$  であるから,

$$\Lambda_m = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

第1平均値の定理により, (4)式で計算される値(平均速度の逆数)と等しい値(速度の逆数)をもつ時刻が,  $t_1$  と  $t_2$  間のどこかに1箇所以上存在する. しかし, この時刻を求めるのは容易ではない. ここでは一般的に行われているように, この平均速度の逆数を, それを求めた期間の中央の時刻  $((t_1 + t_2)/2)$ , 以後, 中央時刻と呼ぶ)での値と解釈することを提案する.

このようにして求めた平均速度の逆数は厳密にいうと(3-1)~(3-3)式でいう真の速度の逆数ではない. したがって, 場合によっては真の値に対しある誤差を持つことになる. 当然のことながら, これらの値を用いて予測した崩壊時刻にも理論上の誤差が生じる. この点につ

いては測定の誤差の影響も含めて5章で議論する。

一般には、(4)式で計算した平均速度の逆数を中央時刻 $(t_1+t_2)/2$ での値と解釈し、横軸に時刻、縦軸に速度の逆数を目盛った座標上に、経時的に記入する。図8にその方法を示す。得られた速度の逆数曲線が直線の場合には前述の直線延長法により、また、曲線の場合には曲線延長法により、崩壊時刻を予測できる。同様に、斎藤型以外でも見掛け上、概略の予測ができる。

また、欠測などで連続したデータが得られなかった場合でも、異なる2期間以上の平均速度の逆数が得られさえすれば、第3章で述べたように斎藤P型が50%を占めていることから、第1次近似として、例えば第8図のように2点を結んだ直線をそのまま延長する直線延長法で予測することができる(以後、2点予測法と呼ぶ)。

この場合には、異なる2期間での平均速度の逆数を $\Lambda_{m1}$ 、 $\Lambda_{m2}$ 、中央時刻を $T_1$ 、 $T_2$ とすると、 $(t_r - T_1)/(t_r - T_2) = \Lambda_{m1}/\Lambda_{m2}$ であるから、次式によって計算できる。

$$t_r = \frac{\Lambda_{m1} \cdot T_2 - \Lambda_{m2} \cdot T_1}{\Lambda_{m1} - \Lambda_{m2}} \quad (5)$$

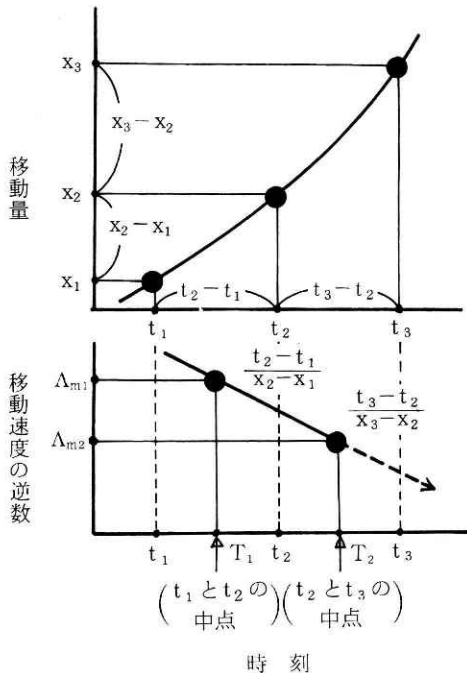


図8 平均速度の逆数の求め方と予測法。

Fig. 8 Diagrams illustrating method for calculating reciprocal of mean velocity from surface displacement and predicting the failure time.

## 5. 誤差について

本章では、第4章までに述べた平均速度の逆数を用いた予測法が、真の速度の逆数でなく

平均速度の逆数を用いるために生ずる理論上の誤差について検討し、実用上問題がないことを示す。また、予測値に与える測定誤差の影響についても議論する。

### 5.1 平均速度の逆数と中央時刻における真の速度の逆数との差

第4章において、平均速度の逆数を中央時刻における速度の逆数の値であると見なすことを提案した。しかしながら、このようにして得られる時系列データは、測定値である移動量の時系列データから計算で求めた近似値である。したがって、もともと理論的に誤差を含んでいる。本節では、この誤差について議論する。

まず、前提条件として、移動パターンは理想的な斎藤型であり、観測された移動量の時系列データには全く測定誤差がないものとする。

斎藤型は(2-3)、(3-3)式で表わされるが、ここで、 $1/(\alpha-1)=n$ 、 $\{a(\alpha-1)\}^{1/(\alpha-1)}=A$ とおく。また、前述のように速度の逆数を  $\Lambda$  とおいて、以後、次式を基本式とする

$$\Lambda = \frac{dt}{dx} = A \cdot (t_r - t)^n \quad (6)$$

図8を参考にして、 $t_1$  と  $t_2$  間の平均速度の逆数  $\Lambda_{m1}$  と中央時刻  $T_1 = (t_1 + t_2)/2$  における真の速度の逆数  $\Lambda_1$  との比  $r$  は、(4)、(6)式より、

$$r = \frac{\Lambda_{m1}}{\Lambda_1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta x}}{A \cdot \{t_r - (t_1 + t_2)/2\}^n} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{A \cdot (t_r - t)^n} dt}{A \cdot \{t_r - (t_1 + t_2)/2\}^n}$$

$$= \begin{cases} \frac{t_2 - t_1}{t_r - (t_1 + t_2)/2} \cdot \frac{1}{\log(t_r - t_1) - \log(t_r - t_2)} & (n=1 \text{ の時}) \\ \frac{t_2 - t_1}{\{t_r - (t_1 + t_2)/2\}^n} \cdot \frac{1-n}{(t_r - t_1)^{1-n} - (t_r - t_2)^{1-n}} & (n \neq 1 \text{ の時}) \end{cases}$$

である。

次に、中央時刻から崩壊時刻までの残り時間  $t_r - (t_1 + t_2)/2$  に対する  $t_1 \sim t_2$  の時間間隔の割合を  $\beta = \{(t_2 - t_1)/2\} / \{t_r - (t_1 + t_2)/2\}$  とおき、上式に代入して整理すると、結局、次式を得る。

$$r = \begin{cases} \frac{2\beta}{\log(1+\beta) - \log(1-\beta)} & (n=1 \text{ の時}) \\ \frac{2(1-\beta)}{(1+\beta)^{1-n} - (1-\beta)^{1-n}} & (n \neq 1 \text{ の時}) \end{cases} \quad (7)$$

ここで、平均速度の逆数がもつ誤差を真の速度の逆数からの差の割合として次式で定義する。

$$\epsilon = 100 \cdot (r-1) \quad (8)$$

導出の過程は省略するが、 $\partial\epsilon/\partial n < 0$ 、 $\partial\epsilon/\partial\beta < 0$ であるので、 $n$ が大きくなるほど、また、 $\beta$ が大きくなるほど(8)式で定義される誤差は大きくなる。 $\beta$ の範囲は定義から $0 < \beta < 1$ である。また、 $n$ の範囲はもともとの定義から行くと、 $n > 0$ であるが、第3章で述べたように、筆者の実験の範囲などからは $0.8 < n < 2.0$ (第3章では $1.5 < \alpha < 2.2$ )である。これらの範囲における誤差を図9に示す。

通常、誤差は小さければ小さいほどよいわけであるが、すべてのことに誤差はつきものであり、どの程度までを許容範囲とするかは時と場合による。非常に感覚的であるが、通常の土木用センサーの測定精度のレベルである1%以内を考えると、図9の範囲で、 $\beta < 1/9$ に取ればよい。これは、崩壊が発生する1時間前に、その前の15分間以内の移動量で、あるいは1日前(24時間前)に6時間以内の移動量で平均速度の逆数を求めた場合に相当する。これは、現実問題としてそれほど厳しい条件ではない。

地すべり・崩壊等の観測では、一般的に一定時間毎の時系列データとして整理を行っている。このような場合には崩壊時刻に近づくほど $\beta$ が大きくなるので、図9に示すように、崩壊時刻に近づくにつれ誤差が大きくなる。全体を通してほぼ同ような誤差に納めるには、崩壊時刻に近付いたら時間間隔を短くする等の工夫が必要であろう。

なお、図9あるいは(7)、(8)式から分かるように、誤差はすべて負なので、平均速度の逆数曲線は真の崩壊時刻より手前の時刻を目指して減少することになり、防災上安全側である。

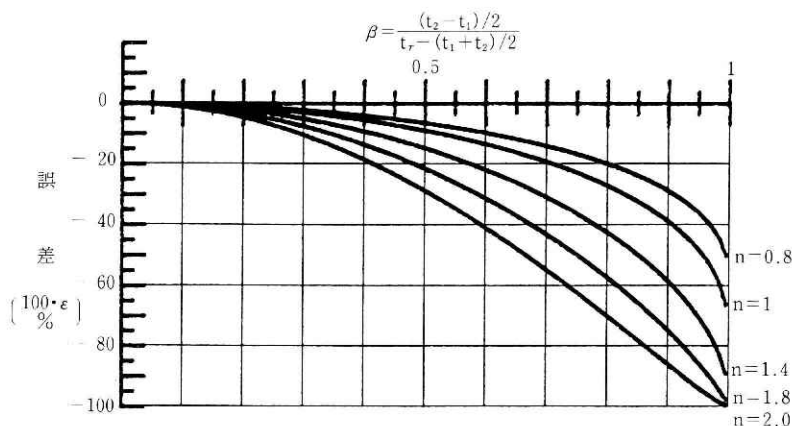


図9 平均速度の逆数が持つ誤差。  
Fig. 9 Errors of reciprocal of mean velocity.

## 5.2 平均速度の逆数で予測した崩壊時刻と真の崩壊時刻との差

前節で平均速度の逆数を中央時刻での値であると見なすと真の速度の逆数よりも幾分小さな値になるが、実用上は問題ないことを述べた。それでも、予測は基本的に外挿であり、限られたデータを基にして遠くまで外挿を行うとわずかな誤差が大きく拡大される場合がある。本節ではこの誤差について議論する。なお、前提条件は前節と同様である。

4.1節で、速度の逆数曲線を予測に使用するときには必要に応じて直線延長法、曲線延長法、接線法を使用すればよいことを述べた。実際には現在の観測レベルから考えて、平均速度の逆数を使用せざるを得ず、その場合の直線延長法の具体的な1方法として、4.2節で、図8あるいは(5)式で2点予測法を示した。これは最小二乗法を用いて行うよりも簡単で、緊急時にも迅速に対応できる具体的な方法である。本節では、この2点予測法を基にして、誤差を議論する。

まず、平均速度の逆数曲線が直線であると仮定して、2点予測法によって崩壊時刻を予測した場合の誤差を表す式を求める。次に、直線でない場合に使用する接線法の理論上の誤差を計算する式を求める。最後に、通常の測定方法、データ整理方法を考慮して、一定時間ごとに観測されている移動量の時系列データの場合と一定距離を移動するに要した所用時間の時系列データの場合の2通りについて具体的な誤差の値を検討する。

### 1) 2点予測法によって予測した場合の誤差

図10において、 $\Lambda_{m1}$ と $\Lambda_{m2}$ を結んで得られる直線と時間軸との交点の時刻を $t_r'$ (予想崩壊時刻と呼ぶ)とする。また、 $T_1$ 、 $T_2$ での真の速度の逆数を $\Lambda_1$ 、 $\Lambda_2$ とし、これらを結んで得られる直線と時間軸との交点の時刻を $t_r''$ (近似崩壊時刻と呼ぶ)とする。なお、 $t_r$ は崩壊時刻である。

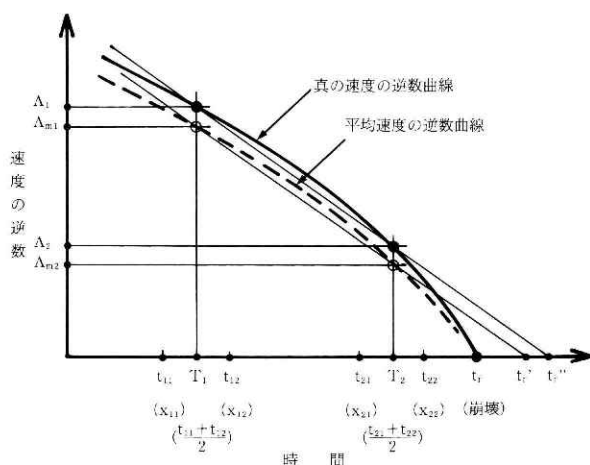


図10 逆数曲線上の2点での予測。

Fig. 10 Prediction using two points on the curve of reciprocal of mean velocity.



この時の誤差  $R$  を  $T_2$  から崩壊時刻までの残り時間  $(t_r - T_2)$  に対する予想崩壊時刻と崩壊時刻との差  $(t_r' - t_r)$  の比と定義する。すなわち、図10を参考にして、

$$R = \frac{t_r' - t_r}{t_r - T_2} = \frac{t_r' - t_r''}{t_r - T_2} + \frac{t_r'' - t_r}{t_r - T_2} \quad (9)$$

である。第3辺第1項は近似崩壊時刻と予想崩壊時刻との差による誤差であり、平均速度の逆数が真の速度の逆数でないために生ずる誤差である。また、第3辺第2項は崩壊時刻と近似崩壊時刻との差による誤差であり、速度の逆数曲線が直線でないために生ずる誤差である。したがって、 $n=1$  (直線) の場合には第3辺第2項は零になる。

$T_1$  と  $T_2$  の離れ具合を表す  $\gamma$  を  $\gamma = (t_r - T_1) / (t_r - T_2)$  とし、 $T_1$ 、 $T_2$  における平均速度の逆数と真の速度の逆数との比を  $r_1$ 、 $r_2$  として、(9)式に付録(1)の(a), (b), (c)式を代入して、結局、次式を得る。

$$R = \frac{\gamma - \gamma^n (r_1/r_2)}{\gamma^n (r_1/r_2) - 1} = \frac{\{\gamma^n - \gamma^n (r_1/r_2)\} \cdot (\gamma - 1)}{\{\gamma^n (r_1/r_2) - 1\} \cdot (\gamma^n - 1)} + \frac{\gamma - \gamma^n}{\gamma^n - 1} \quad (10)$$

(10)式が、平均速度の逆数曲線の任意の2点を結んで崩壊時刻を予測したときの予想崩壊時刻と真の崩壊時刻との誤差を表す式である。

次に、平均速度の逆数曲線が直線でない  $n \neq 1$  の場合には(9), (10)式第3辺第2項の誤差が大きくなるので曲線延長法または接線法により崩壊時刻を予測する必要がある。

## 2) 接線法で予測した場合の誤差

付録図1に示すように、 $T_1$  における真の速度の逆数曲線の接線が時間軸と交わる時刻を  $\tau_{1r}''$  とする。 $T_1$  から  $\tau_{1r}''$  までの時間差を縦軸にとり、付録図2のように記入する(付録図2では  $\tau_{1r}'' - T_1$  と記入されている)。同様に、 $T_2$  に対する  $\tau_{2r}'' - T_2$  を記入する。これらの2点を結んだ直線が時間軸と交わる時刻を  $t_r$  とする(真の崩壊時刻である)。

次に、 $T_1$  における平均速度の逆数曲線の接線が時間軸と交わる時刻を  $\tau_{1r}'$  (付録図1)とし、時間差  $\tau_{1r}' - T_1$  を付録図2に示すように記入する。同様に、 $T_2$  に対する  $\tau_{2r}' - T_2$  を記入し、これらの2点を結んだ直線が時間軸と交わる時刻を  $T_r$  とする。これらより、接線法の誤差  $R'$  を次式で定義する。

$$R' = \frac{T_r - t_r}{t_r - T_2} \quad (11)$$

ここで、付録(2)に示すように、 $T_1$  と  $T_2$  の離れ具合を表わす  $\gamma = (t_r - T_1) / (t_r - T_2)$ 、平均速度の逆数と真の速度の逆数との比を  $r_1$ 、 $r_2$  とすると、次式を得る。

$$R' = \frac{\gamma - K}{K - 1} \quad (12)$$

$$\text{ここに, } K = \frac{\frac{1}{r_2} \cdot \left( \frac{dr}{dt} \right)_{t=T_2} + \frac{n}{t_r - T_2}}{\frac{1}{r_1} \cdot \left( \frac{dr}{dt} \right)_{t=T_1} + \frac{n}{t_r - T_1}} \text{である.}$$

$r$  は平均速度の逆数を求める時の時間間隔の取り方により異なるので,  $dr/dt$  の値を普遍的に求めることは出来ない. 以下では, 一定時間ごとに観測されている移動量の時系列データの場合と一定距離を移動するに要した所用時間の時系列データの場合の2通りについて, 定量的な誤差の検討を行う.

なお, (11), (12)式を求める際に平均速度の逆数曲線の接線を使用したが, 平均速度の逆数は本来離散値であるので, 厳密にいうと, 接線をひくことは出来ない. すなわち, 具体的には(12)式の  $K$  値を定めている  $(dr/dt)_{t=T_1}$  と  $(dr/dt)_{t=T_2}$  の値を厳密に定めることは出来ない. このために, 以下の数値計算では, それぞれ,  $T_1$ ,  $T_2$  の前後で, もっとも接近した2時刻間の変化量から求めた平均的な値を  $(dr/dt)_{t=T_1}$  と  $(dr/dt)_{t=T_2}$  の値としている.

#### 1) 一定時間ごとに観測されている移動量の時系列データの場合

平均速度の逆数を求めた2期間における時間間隔を  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$ , 移動量を  $\Delta x_1$ ,  $\Delta x_2$  とすると, 一定時間ごとに観測されている移動量の時系列のデータの場合には平均速度の逆数を求める時間間隔が全期間にわたって一定であるから  $\Delta t_1 = \Delta t_2$  である. したがって,  $\gamma$  と  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  の間には次式の関係が成り立つ.

$$\gamma = \frac{t_r - T_1}{t_r - T_2} = \frac{(\Delta t_2/2)/(t_r - T_2)}{(\Delta t_1/2)/(t_r - T_1)} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

今,  $n=0.8, 1, 1.4, 2.2$  の場合に,  $\beta_2$  が  $1/3, 1/9, 1/13, 1/100$  である時系列データから計算される誤差を  $\gamma=1.01 \sim 10$  の範囲で図11に示す. 横軸が  $T_1$ ,  $T_2$  の離れ具合を表す  $\gamma$  で, 縦軸が誤差  $(100 \cdot R)$  である.

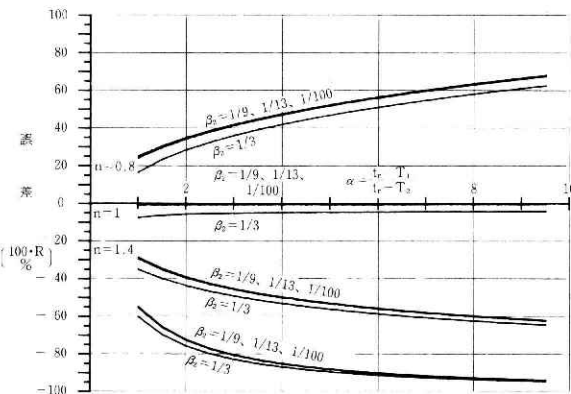


図11 一定時間毎に観測された移動量データから求めた平均速度の逆数曲線上の2点で予測したときの誤差.

Fig. 11 Errors of the time predicted by connecting two points on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at steady time interval.

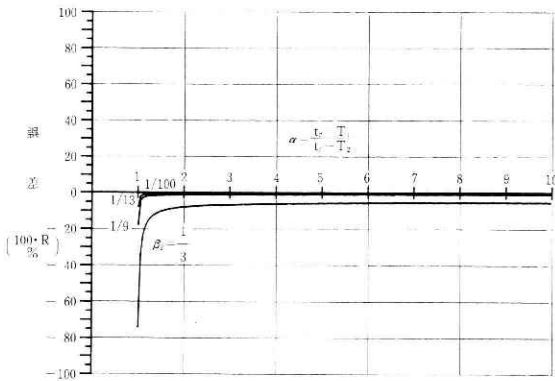


図12a 一定時間毎に観測された移動量データから求めた平均速度の逆数曲線の場合に接線法で予測した時の誤差( $n=0.8$ の時)。

Fig. 12a Errors of the time predicted by the prediction method using two tangent lines on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at steady time interval in the case of  $n=0.8$ .

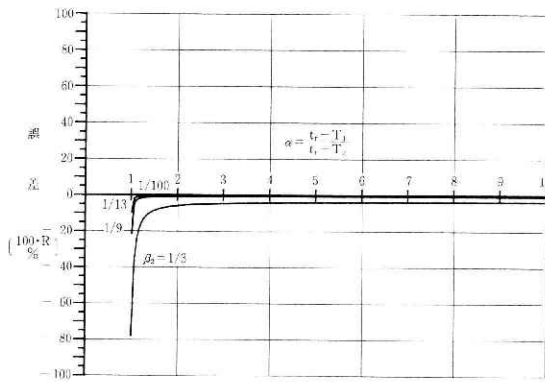


図12b 一定時間毎に観測された移動量データから求めた平均速度の逆数曲線の場合に接線法で予測した時の誤差( $n=1.4$ の時)。

Fig. 12b Errors of the time predicted by the prediction method using two tangent lines on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at steady time interval in the case of  $n=1.4$ .

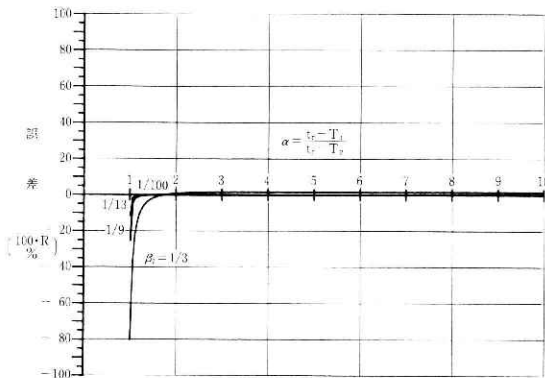


図12c 一定時間毎に観測された移動量データから求めた平均速度の逆数曲線の場合に接線法で予測した時の誤差( $n=2.2$ の時)。

Fig. 12c Errors of the time predicted by the prediction method using two tangent lines on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at steady time interval in the case of  $n=2.2$ .

$n=1$  の場合,  $T_1 \sim T_2$  の時間差を大きくとる程, 誤差は小さくなる.  $\beta_2=1/3$ ,  $\gamma=2 \sim 10$  で誤差 5% 程度,  $\beta_2 < 1/9$  では 1% 以下であり, 通常の場合, 無視し得る誤差である. しかも, 前節で述べたように, 負の値であり, 防災上安全側である.

しかし,  $n=0.8, 1.4, 2.2$  の場合には,  $T_1 \sim T_2$  の時間差を大きくとる程, 誤差は大きくなり, 30~90% である. これは, (9), (10) 式における第 3 辺第 2 項による誤差, すなわち, 平均速度の逆数曲線が直線でないのに, 直線であるとして予測するために生ずる誤差が大きくなるからである. この場合には第 3 章で述べたように, その時点までに得られている曲線の傾向を延長する曲線延長法, 接線法により予想崩壊時刻を求める必要がある.

接線法によった場合の誤差は(12)式で計算される. 上記と同様に,  $\beta_2$  が  $1/3, 1/9, 1/13, 1/100$  である時系列データから計算される誤差を図 12a, 12b, 12c に示す.  $\gamma=2 \sim 10$ ,  $\beta_2=1/3$  で誤差 10% 以内,  $\beta_2 < 1/9$  で 2% 以内, しかも, すべて負の値であり, 防災上安全側である.

## 2) 一定距離を移動するに要した所用時間の時系列のデータの場合

この場合には,  $\Delta x_1 = \Delta x_2$  であるから,

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_2} &= \frac{\Lambda_{m1}/\Lambda_1}{\Lambda_{m2}/\Lambda_2} = \frac{(\Delta t_1/\Delta x_1)/\{A(t_r - T_1)^n\}}{(\Delta t_2/\Delta x_2)/\{A(t_r - T_2)^n\}} \\ &= \frac{(t_r - T_1)^{1-n}(\Delta t_1/2)/(t_r - T_1)}{(t_r - T_2)^{1-n}(\Delta t_2/2)/(t_r - T_2)} = \gamma^{1-n} \frac{\beta_1}{\beta_2} \text{ である.} \end{aligned}$$

(11) 式に代入して整理すると,

$$R = \gamma \cdot \frac{\beta_1/\beta_2 - 1}{1 - \gamma \cdot (\beta_1/\beta_2)} \quad (13)$$

となる.

特に,  $n=1$  の場合には(6), (7) 式より,

$$\begin{aligned} \Lambda_{m1} &= r_1 \cdot \Lambda_1 = 2\beta_1 / \{\log(1 + \beta_1) - \log(1 - \beta_1)\} \cdot A(t_r - T_1) \\ \Lambda_{m2} &= r_2 \cdot \Lambda_2 = 2\beta_2 / \{\log(1 + \beta_2) - \log(1 - \beta_2)\} \cdot A(t_r - T_2) \end{aligned}$$

である. 一方,  $\Lambda_{m1}/\Lambda_{m2} = \Delta t_1/\Delta t_2$  であるから,

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{[2\beta_1 / \{\log(1 + \beta_1) - \log(1 - \beta_1)\}] \cdot A(t_r - T_1)}{[2\beta_2 / \{\log(1 + \beta_2) - \log(1 - \beta_2)\}] \cdot A(t_r - T_2)}$$

となる.  $\beta_1 = (\Delta t_1/2)/(t_r - T_1)$ ,  $\beta_2 = (\Delta t_2/2)/(t_r - T_2)$  を考慮して, 上式を解くと,  $\beta_1 = \beta_2$  である. (13) 式に代入すると,  $R=0$ , すなわち, 誤差は零になる. したがって,  $n=1$  の場合に等移動量間隔毎に測定された時間データで予測すると, 理論上の予想崩壊時刻と崩壊時刻は一致する.

次に, 等移動量間隔の連続した 3 測定値の場合, それらの時刻データを  $t_1, t_2, t_3$  とすると,

$\Delta t_1 = t_2 - t_1$ ,  $\Delta t_2 = t_3 - t_2$ , また,  $\Delta x_1 = \Delta x_2$  であるから,  $\Lambda_{m1}/\Lambda_{m2} = (\Delta t_1/\Delta x_1)/(\Delta t_2/\Delta x_2) = (t_2 - t_1)/(t_3 - t_2)$  となる. また,  $T_1 = (t_1 + t_2)/2$ ,  $T_2 = (t_2 + t_3)/2$  であるから, (5)式に代入して整理すると, 結局,

$$t_r = \frac{(t_2)^2 - t_1 \cdot t_3}{2 \cdot t_2 - (t_1 + t_3)}$$

となる. この式は斎藤(1968)が提案している第3次クリープ段階での斜面崩壊時期の予測式と同じである. このように, 本予測法により, 等移動量間隔の連続した3測定値を用いて崩壊時刻を予測した結果は斎藤の数値計算法または図式解法による結果と一致する.

$n=0.8, 1.4, 2.2$  の場合の(13)式で計算される誤差を図13に示す. なお,  $n=1$  の場合は前述のように誤差0となる.  $n \neq 1$  の場合には, 等時間間隔のデータの場合と同様に(10)式第3辺第1項による誤差が大きくなるので, 曲線延長法または接線法により予測する必要がある.

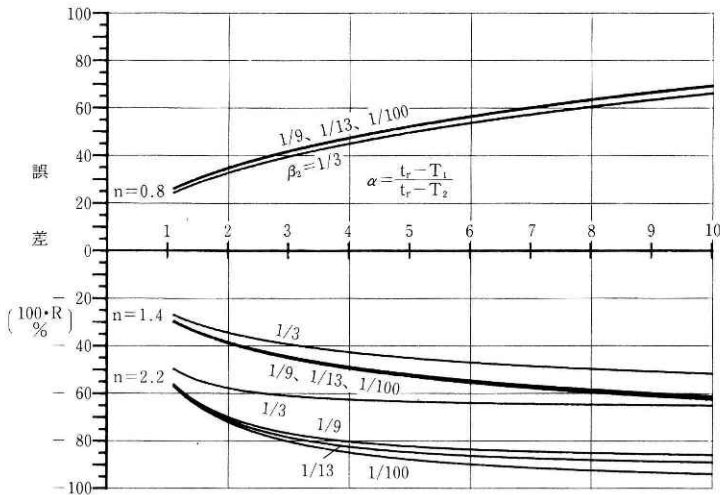


図13 一定移動量毎に観測された所要時間データから求めた平均速度の逆数曲線上の2点で予測したときの誤差.

Fig. 13 Errors of the time predicted by connecting two points on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at every steady distance.

接線法により予測した崩壊時刻と実際の崩壊時刻との差は等時間間隔のデータの場合と同様に, (12)式で計算される. 同様に,  $\beta_2$ が $1/3, 1/9, 1/13, 1/100$ ,  $\gamma=1.01 \sim 10$ の範囲における誤差を図14a, 14b, 14cに示す.  $n=2.2$ の場合に幾分誤差が大きくなるが, すべて安全側(誤差が負)であり, 実用上問題はない.

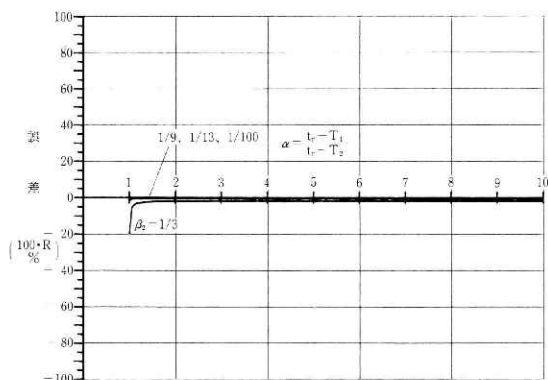


図14a 一定移動量毎に観測された所要時間データから求めた平均速度の逆数曲線の場合に接線法で予測した時の誤差 ( $n=0.8$ の時).

Fig. 14a Errors of the time predicted by the prediction method using two tangent lines on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at steady distance in the case of  $n=0.8$ .

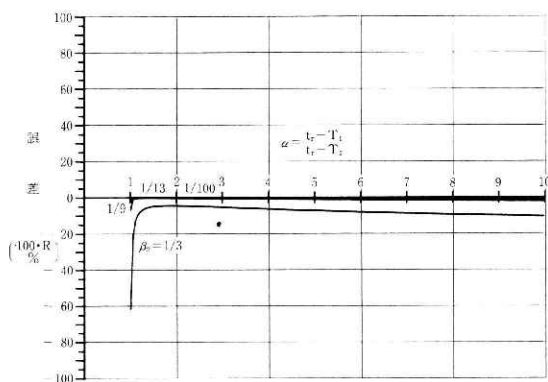


図14b 一定移動量毎に観測された所要時間データから求めた平均速度の逆数曲線の場合に接線法で予測した時の誤差 ( $n=1.4$ の時).

Fig. 14b Errors of the time predicted by the prediction method using two tangent lines on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at steady distance in the case of  $n=1.4$ .

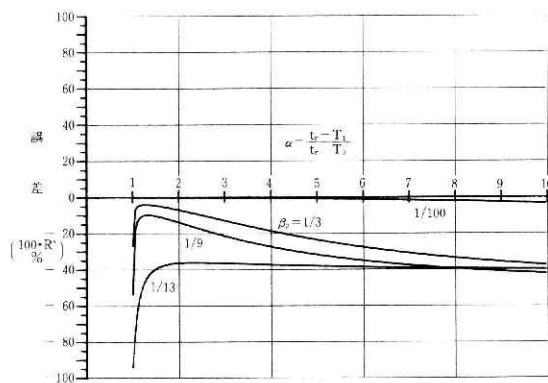


図14c 一定移動量毎に観測された所要時間データから求めた平均速度の逆数曲線の場合に接線法で予測した時の誤差 ( $n=2.2$ の時).

Fig. 14c Errors of the time predicted by the prediction method using two tangent lines on the curve of reciprocal of mean velocity calculated from the data which were measured at steady distance in the case of  $n=2.2$ .

### 5.3 測定誤差の影響

前節までは、理想的な斎藤型の崩壊で、測定誤差がない移動量のデータを用いて平均速度の逆数およびそれを用いて予測した場合の理論上の誤差について議論し、実用上問題がないことを示した。本節では測定誤差が予測値に与える影響について議論する。なお、ここで議論するのは図8あるいは(5)式に示す2点予測法の場合である。

(5)式を変形して、

$$t_r - T_2 = \frac{\Lambda_{m2}}{\Lambda_{m1} - \Lambda_{m2}} \cdot (T_2 - T_1)$$

両辺の対数をとって、全微分を行い、微係数を  $\delta$  の記号で表わすと、

$$\frac{\delta(t_r - T_2)}{t_r - T_2} = \frac{\delta(\Lambda_{m2})}{\Lambda_{m2}} - \frac{\delta(\Lambda_{m1} - \Lambda_{m2})}{\Lambda_{m1} - \Lambda_{m2}} + \frac{\delta(T_2 - T_1)}{T_2 - T_1}$$

ここで、 $\Lambda_{m1} = \Delta t_1 / \Delta x_1$ 、 $\Lambda_{m2} = \Delta t_2 / \Delta x_2$  から、同様に、

$$\frac{\delta(\Lambda_{m1})}{\Lambda_{m1}} = \frac{\delta(\Delta t_1)}{\Delta t_1} - \frac{\delta(\Delta x_1)}{\Delta x_1}, \quad \frac{\delta(\Lambda_{m2})}{\Lambda_{m2}} = \frac{\delta(\Delta t_2)}{\Delta t_2} - \frac{\delta(\Delta x_2)}{\Delta x_2}$$

であるから、上式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{\delta(t_r - T_2)}{t_r - T_2} = & \frac{1}{1 - \Lambda_{m2}/\Lambda_{m1}} \cdot \left\{ \frac{\delta(\Delta x_1)}{\Delta x_1} - \frac{\delta(\Delta x_2)}{\Delta x_2} - \frac{\delta(\Delta t_1)}{\Delta t_1} + \frac{\delta(\Delta t_2)}{\Delta t_2} \right\} \\ & + \frac{\delta(T_2 - T_1)}{T_2 - T_1} \end{aligned}$$

誤差の伝播を考慮して、絶対値で表わすと、

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta(t_r - T_2)}{t_r - T_2} \right| = & \left| \frac{1}{1 - \Lambda_{m2}/\Lambda_{m1}} \right| \cdot \left\{ \left| \frac{\delta(\Delta x_1)}{\Delta x_1} \right| + \left| \frac{\delta(\Delta x_2)}{\Delta x_2} \right| \right. \\ & \left. + \left| \frac{\delta(\Delta t_1)}{\Delta t_1} \right| + \left| \frac{\delta(\Delta t_2)}{\Delta t_2} \right| \right\} + \left| \frac{\delta(T_2 - T_1)}{T_2 - T_1} \right| \end{aligned} \quad (14)$$

となる。(14)式により測定誤差等が崩壊時刻の予測に与える影響を評価できる。

(14)式から  $\Lambda_{m2}/\Lambda_{m1}$  が小さいほど、時間  $(\Delta t_1, \Delta t_2)$  と移動量  $(\Delta x_1, \Delta x_2)$  の測定誤差の影響が小さくなることが分かる。崩壊時刻に近づくほど速度の逆数  $\Lambda_m$  は小さくなるので、 $\Lambda_{m2}/\Lambda_{m1}$  を小さくするためには、 $\Lambda_{m1}$  を求めた時刻からなるべく遅い時刻の  $\Lambda_{m2}$  を使用すればよい。すなわち、 $T_1$  と  $T_2$  との時間差を大きくとる程、時間と移動量の測定誤差が崩壊予測時刻に与える影響は少なくなる。

ところで、 $T_1$  と  $T_2$  との時間差をなるべく大きくとるということは、前節で定義した  $T_1$  と  $T_2$  との離れ具合を表わす指標  $\gamma = (t_r - T_1)/(t_r - T_2)$  の値が大きくなることと同値である。前節で述べたように、速度の逆数曲線が直線でない  $n \neq 1$  の場合には、理論上の誤差が大きくなるので、注意が必要である。

次に、定量的に、予測誤差  $|\delta(t_r - T_2)/(t_r - T_2)|$  の検討を行う。(13)式において、右辺すべての項が1%の誤差であったものとし、極限の  $\Delta_{m2}/\Delta_{m1}=0$  の場合を考えると、予測誤差は(13)式から5%になる。この値はもっとも条件のよい場合であり、 $\Delta_{m2}/\Delta_{m1}$ を1に近く、すなわち、より接近した2点を用いると、予測誤差は大きくなり、 $\Delta_{m2}/\Delta_{m1}=1/2$ では8%に増加する。これは、例えば、前節でも考慮したように、通常の土木用測定機器の精度と考えられる1%で移動量、時間を測定したとしても、崩壊24時間前と12時間前のデータを用いて、12時間前の時点で崩壊までの残り時間を予測すると、最大8%、すなわち、約1時間(±30分)の誤差がありうることを示している。

このように予測は基本的に外挿であるので、測定誤差によって予測誤差は大きく影響される。したがって、確かな予測値を得ようとするならば、当然のこととして、まず、測定の精度を上げることが必要である。同時に、実際的にはなるべく多くの時系列データから、最小二乗法等により最適な近似曲線を求める等の工夫が必要である。すなわち、平均速度の逆数を経時的にプロットし、常に曲線の形状を監視しながら、予測を行うのが賢明である。

## 6. 実際への適用例

### 6.1 崩壊実験から

本節では、筆者の行った実験から3例を示す。なお、実験の概要は福園(1978, 1982)によって、報告されている。図15に斜面表面の傾斜が30度の関東ローム斜面での観測結果を示す。崩壊発生約40分前から速度の逆数曲線はほぼ直線で表される(福園, 1987)。

図16に同じ関東ロームを用いた40度斜面での観測結果を示す(福園, 1987)。速度の逆数曲

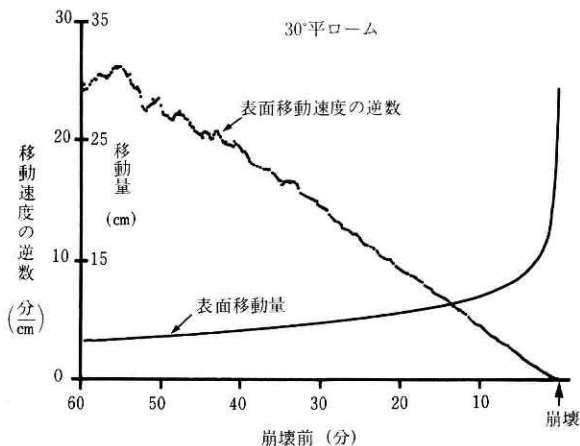


図15 30度関東ローム斜面の崩壊実験で観測された平均速度の逆数の変化(福園, 1987)。

Fig. 15 Variation of the reciprocal of mean velocity of surface displacement measured in a loamy soil model slope having the gradient of 30 degrees (Fukuzono, 1987).



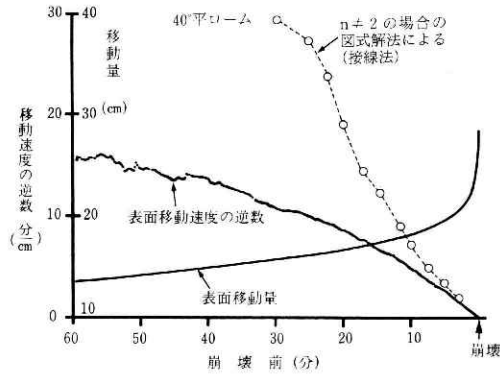


図16 40度関東ローム斜面の崩壊実験で観測された平均速度の逆数の変化(福園, 1987).

Fig. 16 Variation of the reciprocal of mean velocity of surface displacement measured in a sandy soil slope model having the gradient of 30 degrees (Fukuzono, 1987).

線は直線ではなく、上に凸であり、(5)式における  $n=0.8$  である。図7に示した接線法により求めた結果を図16上に併記した。もし完全な斎藤型であったら、接線法で得られた結果は直線になるはずであるが、完全な直線ではない。それでも、比較的正確に予測できるようである。

図17に斜面上の4測点で観測された結果を示す。4測点の移動速度はそれぞれ異なるものの、すべての平均速度の逆数曲線が時間軸上のほぼ同じ時刻に向かっている。このような現象はほかの実験例でも同じである。このことは、同一の崩壊地内であっても、測定場所ごとに異なる傾きを持つ速度の逆数曲線が得られるが、その向かうところは1か所であり、それ

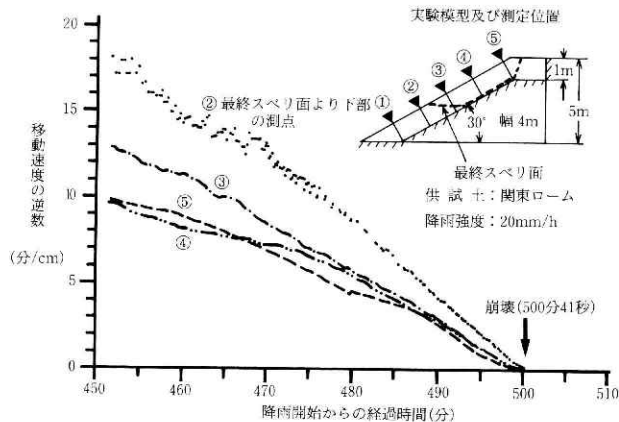


図17 関東ローム斜面の異なる4測点で観測された平均速度の逆数の比較。

Fig. 17 Comparison of curves of reciprocal of mean velocity measured at four measuring points in a loamy soil model slope failure.

を使って予測した結果は同じになるであろうことを示唆している。

## 6.2 高場山トンネル地すべりから(福園, 1987)

本節で使用するデータは山田ら(1971)の論文からの引用である。この地すべりは1970年1月22日に飯山線高場山トンネル付近に発生し、斎藤の予測法により初めてリアルタイムで崩壊時刻が予測された地すべりである。

図18にトンネルの変動速度の逆数の経時変化を示す。これは、山田ら(1971)の論文の図9に示されているトンネルの水平・垂直変位量を基にして、移動の主方向と思われる水平から45度下方向への移動速度の逆数を計算し、経時的にプロットしたものである。

11月10日～崩壊まで、全体的には右下りの直線に見えるが、細かくみると、部分的に上に凸型の集まりである。全体の傾向として、時間が経つにつれて、崩壊の危険性が高まっていることが感覚的に理解される。

次に、山田ら(1971)の論文の図18に示された地すべり計 S27 のひずみ速度から速度の逆数(歪速度の逆数)を計算し、プロットした結果を図19に示す。少なくとも、1月15日以前と以降ではともに凸型ではあるが、変形パターンが異なっている。さらに細かく見ると、約3.5日周期のパターン変化があるように見受けられる。最終段階では崩壊時刻に向かう凸型曲線で予測が可能である。

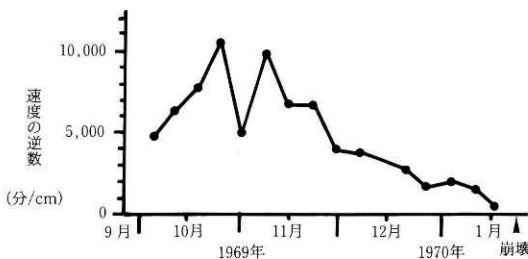


図18 高場山トンネルの移動速度の逆数の変化(福園, 1987)。

Fig. 18 Variation of reciprocal of mean velocity of displacement of tunnel in Takabayama tunnel landslide (Fukuzono, 1987).

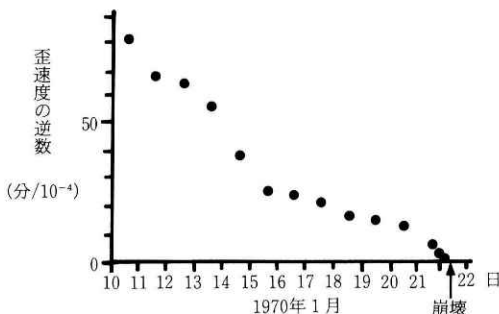


図19 高場山トンネル地すべり S27測点の歪速度の逆数の変化(福園, 1987)。

Fig. 19 Variation of reciprocal of mean velocity of surface displacement measured at point S27 in Takabayama tunnel landslide (Fukuzono, 1987).

これらのデータのみでは、これ以上の解釈は困難であるが、この様に速度の逆数曲線により、かなりの確に変形パターンの変化が把握でき、各段階での予測に関する判断材料となりうる。

### 6.3 地附山地すべりへの適用例(福園, 1987)

本節で使用するデータは長野県企業局(1985)により公表されている資料から引用した。この地すべりは1985年7月26日に長野市において発生し、26名の犠牲者を出したものである。詳細は大八木ら(1986)が報告している。

図20に崩壊源の略図と地表面の相対移動量を測定した伸縮計の設置位置を示す(大八木ら, 1986)。

7月18日頃から崩壊当日まで観測された6点(A・B・C・D・E・F点)の日移動量のデータから計算した平均速度の逆数の7月17日から26日までの変化を図21に示す。全体的には、全測点とも、右下がりの傾向を示し、ほぼ7月26日の崩壊時刻を目指している。7月24日からの最終段階はほぼ直線である。

7月20日から22日かけて、全測点で、速度の逆数曲線が急激な減少を示し、ほぼ、7月23日の未明に崩壊すると予測される。この曲線で判断する限りでは、大崩壊の可能性が考えられ、湯谷団地上部で7月20日深夜に発生した小崩壊のために、21日未明に団地住民の避難がなされたことは賢明な処置であったことがうかがえる。

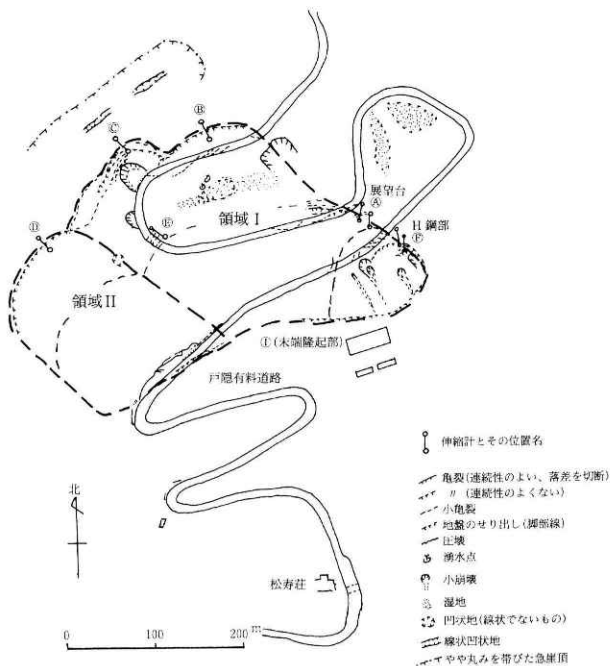


図20 地附山地すべりの崩壊源と伸縮計配置(大八木ら, 1986)。

Fig. 20 Location of extensometers in the Jizukiyama landslide (Oyagi et al., 1986).

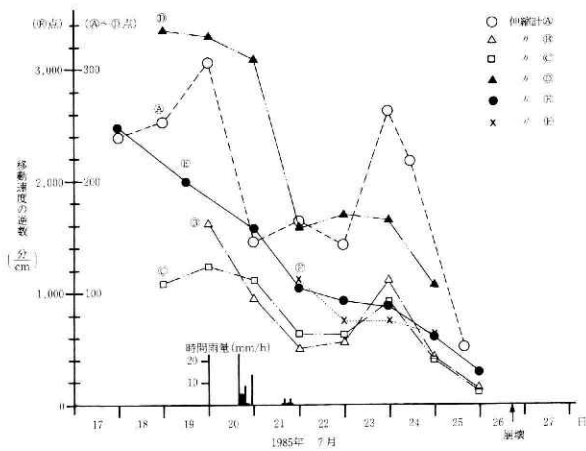


図21 地附山地すべりで観測された移動速度の逆数の変化(大八木ら, 1986).

Fig. 21 Variations of reciprocal of mean velocity calculated at each day in Jizukiyama landslide (Oyagi et al., 1986).

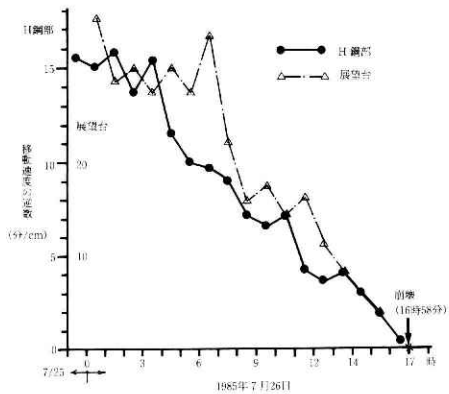


図22 30分毎の移動量から計算した地附山地すべり H 鋼部の移動速度の逆数の変化 (大八木ら, 1986).

Fig. 22 Variation of reciprocal of mean velocity calculated at each 30 minutes in Jizukiya landslide (Oyagi et al., 1986).

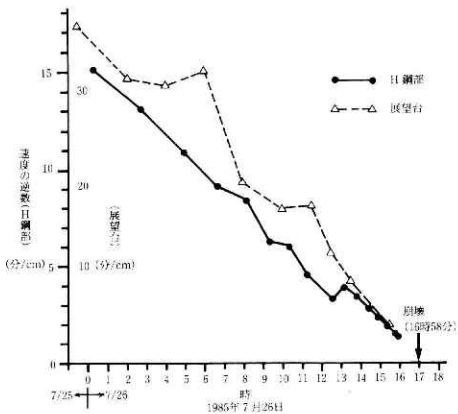


図23 10cm 移動するに要した時間から計算した地附山地すべり H 鋼部の移動速度の逆数の変化.

Fig. 23 Variation of reciprocal of mean velocity calculated at each 10 cm in Jizukiya landslide.

次に、大崩壊発生直前における H 鋼部と展望台での測定データは10分毎に公表されている。崩壊が近付くにつれ動きが激しくなり、伸縮計のインバール線は約20cm 毎、頻繁に張り換えられている。張り換え中は測定できないので、その間は欠測となる。斎藤が提案している図式解法、セミログ法ではこの移動量を仮定しなければならないが、平均速度の逆数を用いる方法ではその必要はない。図22に、H 鋼部と展望台の30分毎の移動量から求めた平均速度の逆数曲線を示す。

ほぼ直線と考えて、崩壊の5時間前の12時頃には16時から18時の間に崩壊が起こりそうであることが予測できる。市が避難命令の決意を固めた15時40分頃には17時頃に崩壊が起こるであろうことがほぼ確信できる。

次に、H 鋼部と展望台の10分毎の移動量データを基にして、約10cm を移動するに要した時間から、移動速度の逆数曲線を求めた結果を図23に示す。一定時間ごとの移動量データによる図17と比較して、バラツキが少なく滑らかな曲線が得られる。また、移動速度が早くなる(崩壊に近づく)程、データの間隔が短くなるので、曲線が急速に崩壊時刻に近づく凸型の場合等に有効である。

#### 6.4 袖地地すべりへの適用例

長野県北部、小川村・鬼無里村境の背梁山脈の頂上部にて発生した袖地地すべりは1987年7月4日に変状が確認され、11日にその一部である若揃連沢頭部が崩壊した。この崩壊に至るまでの移動経過は簡易変位板と伸縮計によって観測されている(山浦ら, 1988)。山浦らは崩壊の約1日前の伸縮計のデータから、崩壊の直前には崩壊時刻が予知できたと述べている。図24に速度の逆数の時間変化を山浦ら(1988)の論文から引用して示す。速度の逆数曲線は崩壊1日前からほぼ直線である。

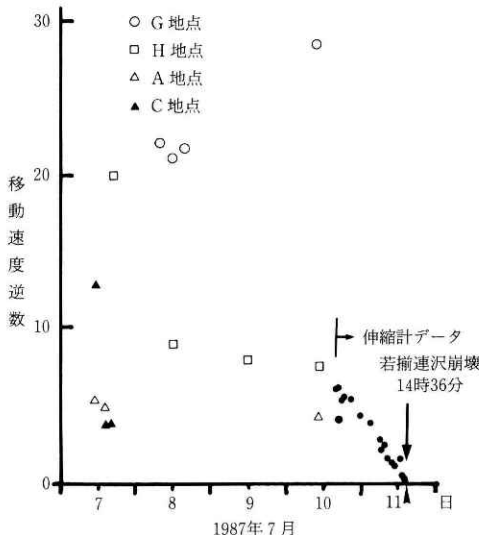


図24 袖地地すべりで観測された移動速度の逆数の変化(山浦ら, 1988)。

Fig. 24 Variations of reciprocal of mean velocity in Sodechi landslide (Yamaura et al. 1988).

## 7. 予知計の試作

前章までに、平均速度の逆数を用いて崩壊時刻を予測する基本概念、その根拠、具体的な方法と誤差、実際への適用例について述べた。本章では、これらの考え方を基にしてオンラインで崩壊時刻を予測する予知計を試作した結果について述べる。

### 7.1 機器構成と動作

第4章において、現在の観測技術のレベルからいって、真の速度あるいは速度の逆数を直接測定することは不可能であるので、移動量から計算される平均速度の逆数を予測に使用せざるをえないことを述べた。本章で述べる予知計も基本的に移動量から平均速度の逆数を求めている。これを市販のワンボードマイコンによって計算させることにし、これに最適な周辺機器を揃えることにした。

詳細な回路図は省略するが、図25に全体の機器構成を示す。基本的に以下の部分からなる。

- ① センサー部(ロータリーエンコーダー、移動量の測定)
- ② 入力回路(エンコーダー回路、アップダウンカウンタ回路)
- ③ クロック回路(クロック、カウンタ、時刻の測定)
- ④ 演算・データ保存回路(ワンボードマイコン、平均速度の逆数、予測時刻の計算)
- ⑤ 出力回路(D/A コンバーター、移動量、速度の逆数、予測時刻のアナログ出力)
- ⑥ 電源回路(直流電源、各回路用の電源)
- ⑦ その他(ケース、スイッチ等)

これらの基本的な動作は次のとおりである。

まず、クロックで一定時間間隔のパルスを出し、クロックカウンタで積算する。一方、斜面の移動量をロータリーエンコーダとエンコーダー回路によって、一定移動量ごとのパルス信号に変換する。正・逆2方向の信号が得られるので、アップダウンカウンタにより積算値を求める。この値はD/A コンバーター(D/A ①)に移動量として常時出力する。

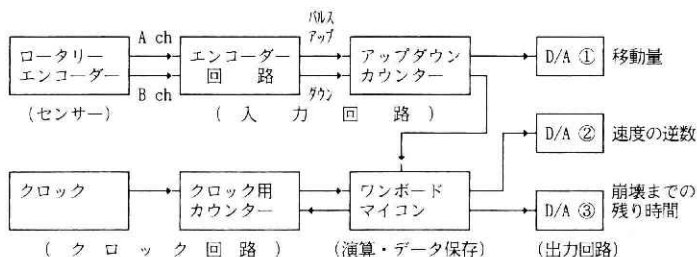


図25 試作した予知計の機器構成。

Fig. 25 Schematic diagram of the prototype of a failure time predictor examined at the experiment.

アップダウンカウンターの積算値が外部スイッチによってあらかじめ設定されている値に達した瞬間に、クロックカウンターの積算値をワンボードマイコンに取り込む。この値が平均速度の逆数であり、D/A コンバーター(D/A ②)で出力される。このデジタル値はメモリーの許すかぎり保存される。取り込んだらすぐにリセット信号を出し、クロックカウンターの値を零にする。2つ以上の平均速度の逆数から崩壊時間を計算し、D/A コンバーター(D/A ③)に出力する。同様の手順を繰り返す。

崩壊時刻の計算は今のところもっとも簡単な2点予測で行っている。このアルゴリズムはボード内のロムを書き換えることによって変更することができるので、今後、最小二乗法などの統計処理を行うアルゴリズムも検討する予定である。

今回試作した予知計では移動量を測定するセンサーとして通常のポテンショメーター式ではなくロータリーエンコーダーを用いた。ロータリーエンコーダーは消費電力が比較的大きいので、100V 電源の入手困難な場所での使用が制限される。また、電源トラブルなどにより途中で欠測が生じると、積分値としての移動量が得られなくなるなどの欠点を持つ。

しかし、ロータリーエンコーダーは一定距離だけ移動するごとにパルス信号を発生するので、パルスと次のパルスの間の経過時間を測定するだけで、簡単に平均速度の逆数を得ることができる。したがって、本論文の主題である平均速度の逆数を用いて崩壊発生時刻を予測するには適したセンサーである。

## 7.2 実 測 例

コンピュータにより作成した理想的な斎藤型(速度の逆数曲線が直線)のデータを入力した場合のシミュレーションの結果を図26に示す。

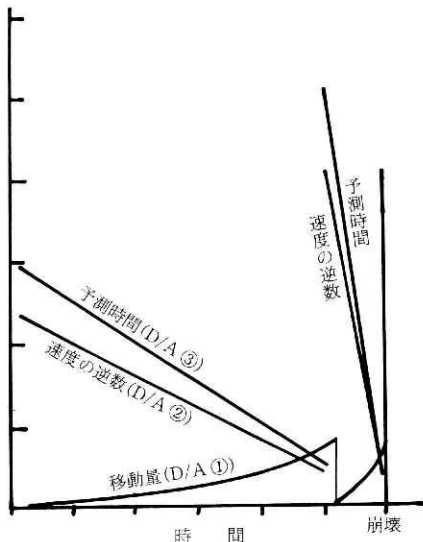


図26 理想的な斎藤型のデータを入力した場合の予知計の出力。

Fig. 26 Output of the prototype of a failure time predictor for ideal Saito type data.

また、30度砂斜面の崩壊実験で使用したときの結果を図27に示す。移動量と速度の逆数は良好な結果が得られている。予測時間は途中段階ではおおむね良好であるが最終段階でのデータのバラツキが大きい、外部スイッチによって設定するデータ取り込み間隔をもう少し長くするなどの工夫が必要であろう。今後、実験を重ねながら、前述の電源のことなども含めて問題点の改良を行い、実斜面で使用するのに適した機器構成、アルゴリズムの検討を行いたい。

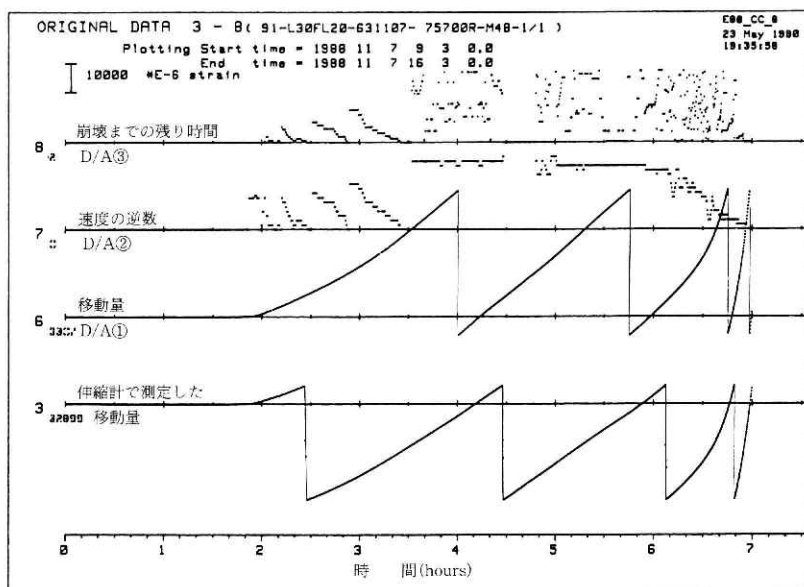


図27 崩壊実験での予知計の出力。

Fig. 27 Output of the prototype of a failure time predictor-meter in the case of a model slope failure.

## 8. ま と め

本論文では、斜面崩壊の発生時刻を予測するために、平均速度の逆数を利用する現実的な方法を提案し、その前提である移動モデルおよび予測の具体的な方法、誤差、適用例ならびにその考え方に基づく予知計を試作した結果について述べた。以上まとめると次のようである。

1) 速度の逆数曲線によって崩壊の危険度を常時監視することができる。この曲線は崩壊が発生する前の最終段階において右下りとなり、崩壊発生時刻で時間軸にほぼ接する。この



性質を利用して崩壊発生時刻の予測が可能である。

2) 最終段階における移動速度の対数と加速度の対数は比例する。この関係は(1)式のモデルで表現される。この形の式は土・岩石のみでなく他の多くの物質の破壊現象を表わす共通的な式であると思われる。(1)式により、過去に提案されているベキ関数型、指数関数型、斎藤型の移動モデルを統一的に表わすことができる。

3) 過去に観測されたすべての崩壊における最終段階の移動速度の変化はすべて上記3関数のうちの一つで表現することができる。全観測例のうち、斎藤型が80%である。

4) 上記3関数型の速度の逆数曲線は、ベキ関数型、指数関数型が上に凹で、斎藤型は場合によって凸、直、凹で、共に一様な右下りである。斎藤型は時間軸上の一点 $t_r$ に向かう曲線であり、この $t_r$ がほぼ崩壊時刻に等しい。このことと3)の結果を根拠にして、途中までに得られている速度の逆数曲線を延長し、時間軸と交わる点を求めることにより、崩壊時刻を予測できる。速度の逆数曲線が直線の場合には直線延長法、曲線の場合にはそれまでの傾向を考慮しながら延長する曲線延長法を提案した。また、曲線の場合に崩壊時刻を客観的に求める方法として図7に示す接線法を提案した。

5) 現在の観測レベルから考えて、真の速度の逆数を直接測定することは出来ないので、通常観測されている移動量の時系列データから計算した平均的な速度の逆数をその時間の中央の時刻における値と求めて平均速度の逆数により崩壊発生時刻を予測する方法を提案した(図8および(5)式)。

6) 平均速度の逆数は真の速度の逆数ではなく理論上の誤差があり、また、この値を用いて予測すると同様な理論上の誤差が生じることを示し、これらの誤差を求める式を導出した。さらに、この式で計算される結果から、これらの誤差は通常の場合、実用上問題のないほど小さく、かつ、防災上安全側であるが、場合によっては崩壊時刻に近付いたらデータの間隔を短くするなどの工夫を行えばより誤差が少なくなることを示した。また、一定距離を移動するに要する所要時間の時系列データを使用するほうが、通常の等時間ごとの移動量データを使用するよりも全体を通しての誤差は小さいことを示した。

7) 一定距離を移動するに要した時間の時系列データの連続した3測定値から求めた平均速度の逆数を用いて予測した崩壊時刻は斎藤の3点予測法で予測した時刻と同じである。

8) 崩壊実験データおよび高場山トンネル地すべり、地附山地すべり、袖地地すべりの観測データから得られた平均速度の逆数曲線を示し、この曲線を用いて崩壊危険度の監視および崩壊発生時刻の予測を行うことの有効性を示した。

9) 以上の考え方を基にして、平均速度の逆数から崩壊発生時刻をリアルタイムで予測する崩壊予知計を試作し、試作機器の有効性を示した。

## 9. おわりに

本論文は、昭和60年度までに得られていた結果を基に、昭和61年度から昭和63年度までに行った当研究所初めての指定研究の一つである『斜面崩壊発生の際的予測に関する実験的研究』で得られた成果をまとめたものである。

最後に、本論文で提案した予測法は実斜面の崩壊でその有効性が確認されているが、もともとは当研究所の大型降雨実験装置を用いた一連の大規模な崩壊実験により得られた成果である。実験によっては本来の勤務時間外まで装置の運転・操作に御協力頂いた施設課の方々と実験に当たり多大のご援助を頂いた当時の降雨実験室の皆様には、末尾ながら、ここに深く感謝致します。

## 参 考 文 献

- 1) Campanella R. G. & Y. P. Vaid (1974) : Triaxial Plane Strain Creep Rupture of an Undisturbed Clay, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 11, No. 1, 1-10.
- 2) 福園輝旗(1978) : 降雨による斜面崩壊と内部応力状態について, 国立防災科学技術センター研究報告第20号, 101-122.
- 3) 福園輝旗・寺島治男(1982) : 降雨による粘性土砂面の崩壊実験, 国立防災科学技術センター研究報告第29号, 103-122.
- 4) 福園輝旗(1985a) : 表面移動速度の逆数を用いた降雨による斜面崩壊発生時刻の予測法, 地すべり第22巻第2号, 8-13.
- 5) Fukuzono T. (1985b) : A New Method for Predicting the Failure Time of a Slope, Proc. of IV th Int. Conf. and Field Workshop on Landslide, 145-150.
- 6) 福園輝旗(1987) : 崩壊時期の予測について, 土砂災害の実態と予知・予防上の問題点論文・資料集, シンポジウム—土砂災害の実態と予知・予防上の問題点, 地すべり学会.
- 7) 駒村富士弥(1976) : 地すべり土の挙動に関するレオロジー的研究(II), 新砂防101, 17-19.
- 8) 村山朔郎・柴田徹(1956) : 粘土のレオロジー的特性について, 土木学会論文集第40号, 1-31.
- 9) 長野県企業局(1985) : 昭和60年戸隠有料道路地すべり対策に伴う機構調査提出資料, 昭和60年8月1日.
- 10) 大村寛・土屋智(1988) : すべり面拡大モデルによるクリープ現象の解析, 地すべり, 第25巻, 第1号, 1-6.
- 11) 大八木規夫・田中耕平・福園輝旗(1986) : 1985年7月26日長野市時地附山地すべりによる災害の調査報告, 国立防災科学技術センター主要災害調査報告第26号.
- 12) 斎藤迪孝(1968) : 第3次クリープによる斜面崩壊時期の予知, 地すべり第4巻第3号, 1-8.
- 13) 島通保(1977) : 排土に伴う斜面崩壊発生の際的予測の問題について, 京大防災研究所年報第20号 B-1, 173-184.
- 14) Singh A. & J. Mitchell (1969) : CREEP POTENCIAL AND CREEP RUPTURE OF SOILS, Proc. 7th ICSMFE, 379-384.
- 15) Varnes D. J. (1983) : TIME-DEFORMATION RELATIONS IN CREEP TO FAILURE OF EARTH MATERIALS, Proc. of 7th Southeast Asian Geotechnical Conference, 107-130.
- 16) Vibert C. & M. Arnould (1987) : An Attempt at Predicting the Failure of a Mountainous Slope : The "La Clapiere" Slide at Saint-Etienne-de-Tince(France), Landslide News No. 1, 4-6, 地すべり学会発行.

- 17) Voight B. & B. A. Kennedy (1979) : SLOPE FAILURE OF 1967-1969, CHUQUICAMATA MINE, CHILE, ROCKSLIDES AND AVALANCHES 2, ELSEVIER SCIENTIFIC PUBLISHING COMPANY, 595-532.
- 18) Voight B. (1989a) : A Relation to Describe Rate-Dependent Material Failure, SCIENCE, VOL. 243, 200-203.
- 19) Voight B. (1989b) : Materials Science Law Apples to Time Forecastsot Slope Failure, Landslide News No. 3, 8-11, 地すべり学会発行.
- 20) 渡正亮・竹林征三・松田六男(1976) : 岩すべり崩壊について, 地すべり学会第15回研究発表会研究発表予稿集, 68-69.
- 21) 山口真一(1977) : 斜面崩壊時期の予測式の補正係数について, 地すべり第14巻第2号, 1-3.
- 22) 山田剛二・小橋澄治・草野国重(1971) : 高場山トンネルの地すべりによる崩壊, 地すべり第8巻第1号, 11-24.
- 23) 山浦直人・宮沢洋介・藤岡毅(1988) : 袖地地すべり(長野県小川村)の移動特性について, 第27回地すべり学会研究発表講演集, 68-71.
- 24) 吉田保・野地正保(1984) : 地すべり速度について, 第23回地すべり学会研究発表会予稿集, 136-139.  
(1990年8月8日原稿受理)

付録(1)

本文で述べたように、図10を参考にして、 $T_1$ と $T_2$ の離れ具合を示す量 $\gamma$ を、 $\gamma = (t_r - T_1) / (t_r - T_2)$ と定義する。整理して、

$$t_r = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1} \quad (a)$$

次に $T_1$ 、 $T_2$ における真の速度の逆数 $\Lambda_1$ と $\Lambda_2$ との比は上述の定義を考慮して、

$$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = \frac{A \cdot (t_r - T_1)^n}{A \cdot (t_r - T_2)^n} = \gamma^n \text{ である。}$$

また、平均速度の逆数( $\Lambda_{m1}$ 、 $\Lambda_{m2}$ )と真の速度の逆数( $\Lambda_1$ 、 $\Lambda_2$ )との比 $r_1$ 、 $r_2$ を用いて、平均速度の逆数 $\Lambda_{m1}$ と $\Lambda_{m2}$ との比は、

$$\frac{\Lambda_{m1}}{\Lambda_{m2}} = \frac{r_1 \cdot \Lambda_1^n}{r_2 \cdot \Lambda_2^n} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \gamma^n \text{ である。}$$

図10において、 $(t_r'' - T_1) / (t_r'' - T_2) = \Lambda_1 / \Lambda_2$ であるから、整理して、

$$t_r'' = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{(\Lambda_1 / \Lambda_2) - 1} = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{\gamma^n - 1} \quad (b)$$

同様に、図10において、 $(t_r' - T_1) / (t_r' - T_2) = \Lambda_{m1} / \Lambda_{m2}$ であるから、整理して、

$$t_r' = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{(\Lambda_{m1} / \Lambda_{m2}) - 1} = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{\gamma^n \cdot (r_1 / r_2) - 1} \quad (c)$$

(a)、(b)、(c)を(9)式に代入して整理すると、(10)式を得る。

なお、図8に示す記号を用いて、 $\beta_1 = \{(t_{12} - t_{11}) / 2\} / (t_r - T_1)$ 、 $\beta_2 = \{(t_{22} - t_{21}) / 2\} / (t_r - T_2)$ とにおいて、 $r_1 / r_2$ は、

$$\frac{r_1}{r_2} = \begin{cases} \frac{\beta_1 \cdot \log(1 + \beta_2) - \log(1 - \beta_2)}{\beta_2 \cdot \log(1 + \beta_1) - \log(1 - \beta_1)} & (n=1 \text{ の時}) \\ \frac{\beta_1 \cdot (1 + \beta_2)^{1-n} - (1 - \beta_2)^{1-n}}{\beta_2 \cdot (1 + \beta_1)^{1-n} - (1 - \beta_1)^{1-n}} & (n \neq 1 \text{ の時}) \end{cases}$$

である。

付録(2)

(6)式から、真の速度の逆数は  $\Lambda = A(t_r - t)^n$  である。よって、

$$d\Lambda/dt = An(t_r - t)^{n-1} = \Lambda \cdot n / (t_r - t).$$

したがって、付録図1から、

$$\tau_{1r}'' - T_1 = \Lambda_1 \cdot \{-1/(d\Lambda/dt)\}_{t=T_1} = -(t_r - T_1)/n$$

$$\tau_{2r}'' - T_2 = \Lambda_2 \cdot \{-1/(d\Lambda/dt)\}_{t=T_2} = -(t_r - T_2)/n$$

付録図2において、

$$\frac{t_r - T_1}{t_r - T_2} = \frac{\tau_{1r}'' - T_1}{\tau_{2r}'' - T_2} = \frac{-(t_r - T_1)/n}{-(t_r - T_2)/n} = \gamma \text{ であるから、整理して、}$$

$$t_r = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1} \quad (d)$$

次に、平均速度の逆数と真の速度の逆数との比  $r$  を用いると、平均速度の逆数は  $\Lambda_m = r \cdot \Lambda$  である。よって、

$$\frac{d\Lambda_m}{dt} = \Lambda \cdot \frac{dr}{dt} + r \cdot \frac{d\Lambda}{dt} = \Lambda \cdot \left\{ \frac{dr}{dt} + r \cdot \frac{n}{t_r - t_1} \right\} \text{ である。}$$

したがって、付録図1から、

$$\tau_{1r}' - T_1 = \Lambda_{m1} \cdot \{-1/(d\Lambda_m/dt)\}_{t=T_1} = -r_1 / \{ (dr/dt)_{t=T_1} + r_1 \cdot n / (t_r - T_1) \}$$

$$\tau_{2r}' - T_2 = \Lambda_{m2} \cdot \{-1/(d\Lambda_m/dt)\}_{t=T_2} = -r_2 / \{ (dr/dt)_{t=T_2} + r_2 \cdot n / (t_r - T_2) \}$$

付録図2において、

$$\frac{T_r - T_1}{T_r - T_2} = \frac{\tau_{1r}' - T_1}{\tau_{2r}' - T_2} = \frac{(1/r_2) \cdot (dr/dt)_{t=T_2} + n / (t_r - T_2)}{(1/r_1) \cdot (dr/dt)_{t=T_1} + n / (t_r - T_1)}$$

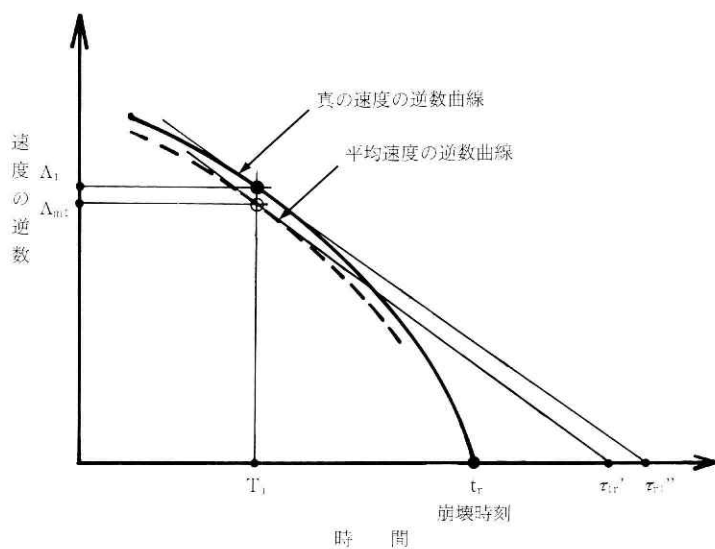
整理して、

$$T_r = T_2 + \frac{T_2 - T_1}{K - 1} \quad (e)$$

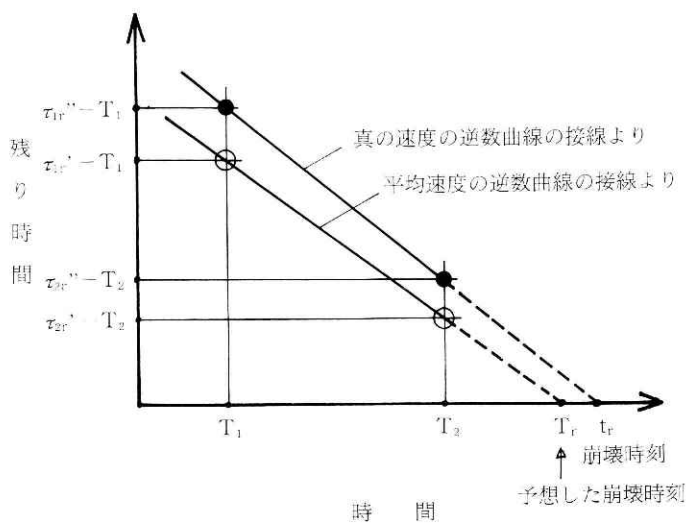
ただし、

$$K = \frac{(1/r_2) \cdot (dr/dt)_{t=T_2} + n / (t_r - T_2)}{(1/r_1) \cdot (dr/dt)_{t=T_1} + n / (t_r - T_1)}$$

(d), (e)式を(11)式に代入すると、(12)式を得る。



付録図 1



付録図 2